

Diszkrét Matematika 2 vizsgaanyag

ELTE IK Esti képzés

2017. tavaszi félév

Tartalom

1.	Számfogalom bővítése, homomorfizmusok.....	2
2.	Csoportok.....	9
3.	Részcsoporth.....	11
4.	Generátum.....	14
5.	Mellékosztály, Lagrange tétele és következményei.....	16
6.	Normálosztó, homomorfizmustétel.....	18
7.	Gráfok alapfogalmai.....	22
8.	Fák.....	28
9.	Feszítőfa, Euler-vonal, Hamilton-kör.....	30
10.	Címkézett gráfok.....	34
11.	Irányított gráfok.....	36

1. Számfogalom bővítése, homomorfizmusok

Tételek, definíciók

1. Definiáld a binér művelet fogalmát!

Definíció

Egy X halmazon értelmezett **binér** (kétváltozós) **művelet** egy $* : X \times X \rightarrow X$ függvény. Gyakran $*(x, y)$ helyett $x * y$ -t írunk.
Egy X halmazon értelmezett **unér** (egyváltozós) **művelet** egy $* : X \rightarrow X$ függvény.

2. Adj 2 példát binér műveletre!

- $\mathbb{C}$ halmazon az $+$, $\cdot$ **binér**, $z \mapsto -z$ (ellentett) **unér művelet**.
- $\mathbb{C}$ halmazon az $\div$ (osztás) **nem művelet**, mert $\text{dmn}(\div) \neq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmazon az $\div$ **binér**, az $x \mapsto 1/x$ (reciprok) **unér művelet**.
- $\mathbb{C}$ halmazon a 0 illetve 1 konstans kijelölése **nullér művelet**.

3. Add meg a Peano-axiómákat!

Peano-axiómák

Legyen $\mathbb{N}$ egy halmaz, $+$ egy unér művelet (rákövetkező). Ekkor

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N}$;
3. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \neq 0$;
4. $n, m \in \mathbb{N}$ esetén $n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$;
5. $(S \subset \mathbb{N}, 0 \in S, (n \in S \Rightarrow n^+ \in S)) \Rightarrow S = \mathbb{N}$.

4. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az összeadás a természetes számok halmazán?

Állítás

Ha $k, m, n \in \mathbb{N}$, akkor

1. $(k + m) + n = k + (m + n)$ (asszociativitás);
2. $k + m = m + k$ (kommutativitás);
3. $0 + n = n + 0 = n$ (van nullelem/egységelem/semleges elem).

5. Definiáld az algebrai struktúra fogalmát!

6. Definiáld a grupoid fogalmát!

Definíció

A $(H; M)$ pár **algebrai struktúra**, ha H egy halmaz, M pedig H -n értelmezett műveletek halmaza.
Az egy binér műveletes struktúrát **grupoidnak** nevezzük.

7. Definiáld az asszociativitás fogalmát!

Definíció

$A * : X \times X \rightarrow X$ művelet

asszociatív, ha $\forall a, b, c \in X : (a * b) * c = a * (b * c)$;

kommutatív, ha $\forall a, b \in X : a * b = b * a$.

8. Adj példát nem asszociatív műveletre!

Az **osztás** **nem asszociatív**: $\frac{a}{bc} = (a \div b) \div c \neq a \div (b \div c) = \frac{ac}{b}$.

9. Definiáld a kommutativitás fogalmát!

Definíció

$A * : X \times X \rightarrow X$ művelet

asszociatív, ha $\forall a, b, c \in X : (a * b) * c = a * (b * c)$;

kommutatív, ha $\forall a, b \in X : a * b = b * a$.

10. Adj példát nem kommutatív műveletre!

A függvények halmazán a **kompozíció** művelete **nem kommutatív**:

$$f(x) = x + 1, g(x) = x^2:$$

$$x^2 + 1 = (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) = (x + 1)^2.$$

11. Definiáld a félcsoport fogalmát!

12. Definiáld a semleges elem fogalmát!

13. Definiáld a monoid fogalmát!

Definíció

A $(G; *)$ grupoid **félcsoport**, ha $*$ **asszociatív** G -n.

Ha létezik $s \in G : \forall g \in G : s * g = g * s = g$,

akkor az s **semleges elem** (**egységelem**), $(G; *)$ pedig **semleges elemes félcsoport** (**egységelemes félcsoport**, **monoid**).

14. Hány semleges elem lehet egy grupoidban?

A semleges elem egyértelmű, így csak egy lehet belőle egy grupoidban.

15. Definiáld az inverz fogalmát!

16. Definiáld a csoport fogalmát!

17. Definiáld az Abel-csoport fogalmát!

Definíció

Legyen G egy egységelemes félcsoport a $*$ művelettel és e egységelemmel.

A $g \in G$ elem **inverze** a $g^{-1} \in G$ elem, melyre $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

Ha minden $g \in G$ elemnek létezik inverze, akkor G **csoport**.

Ha $*$ kommutatív is, akkor G **Abel-csoport**.

18. Hány inverze lehet egy elemnek félcsoportban?

Félcsoportban az inverz egyértelmű, egy elemnek csak egy inverze lehet.

19. Hogyan konstruálható meg az egész számok halmaza a természetes számok segítségével?

$\mathbb{Z}$ megkonstruálható $\mathbb{N}$ -ből: az $(r, s) \sim (p, q)$, ha $r + q = p + s$ ekvivalenciareláció osztályai az egész számok.

20. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a szorzás az egész számok halmazán?

Állítás

A $\mathbb{Z}$ a $\cdot$ műveletre **kommutatív egységelemes félcsoport**.

(A $\cdot$ kommutatív, asszociatív, van egységelem.)

21. Definiáld a disztributivitás fogalmát!

Állítás

$\mathbb{Z}$ -n a $\cdot$ az $+$ -ra nézve **disztributív**:

$\forall k, l, m \in \mathbb{Z}$ -re: $k \cdot (l + m) = k \cdot l + k \cdot m$, illetve $(k + m) \cdot l = k \cdot l + m \cdot l$.

22. Definiáld a gyűrű fogalmát!

Definíció

Legyen $(R; *, \circ)$ algebrai struktúra, ahol $*$ és $\circ$ binér műveletek. Azt mondjuk, hogy teljesül a $\circ$ -nek a $*$ -ra vonatkozó **bal oldali disztributivitása**, illetve **jobb oldali disztributivitása**, ha

$\forall k, l, m \in R$ -re: $k \circ (l * m) = (k \circ l) * (k \circ m)$, illetve

$\forall k, l, m \in R$ -re: $(k * l) \circ m = (k \circ m) * (l \circ m)$.

Definíció

Az $(R; *, \circ)$ két binér műveletes algebrai struktúra **gyűrű**, ha

- $(R; *)$ **Abel-csoport**;
- $(R; \circ)$ **félcsoport**;
- teljesül a $\circ$ -nek a $*$ -ra vonatkozó mindkét oldali **disztributivitása**.

Az $(R; *, \circ)$ gyűrű **egységelemes gyűrű**, ha R -en a $\circ$ műveletre nézve van egységelem.

Az $(R; *, \circ)$ gyűrű **kommutatív gyűrű**, ha a $\circ$ művelet **(is)** kommutatív.

23. Definiáld a nullelem fogalmát!

24. Definiáld az egységelem fogalmát!

Elnevezés

$(R; *, \circ)$ két binér műveletes algebrai struktúra esetén a $*$ -ra vonatkozó semleges elemet **nullelemnek**, a $\circ$ -re vonatkozó semleges elemet **egységelemnek** nevezzük. A nullelem szokásos jelölése **0**, az egységelemé **1**, esetleg **e**.

25. Definiáld a nullosztómentes gyűrű fogalmát!

Definíció

Ha egy $(R, *, \circ)$ gyűrűben $\forall r, s \in R, r, s \neq 0$ esetén $r \circ s \neq 0$, akkor R nullosztómentes gyűrű.

26. Definiáld a ferdetest fogalmát!

27. Definiáld a test fogalmát!

Definíció

Az $(R; *, \circ)$ gyűrű ferdetest, ha $(R \setminus \{0\}; \circ)$ csoport. A kommutatív ferdetestet testnek nevezzük.

28. Hogyan konstruálható meg a racionális számok halmaza az egész számok segítségével?

$\mathbb{Q}$ megkonstruálható $\mathbb{Z}$ segítségével: az $(r, s) \sim (p, q)$ ($s, q \neq 0$), ha $r \cdot q = p \cdot s$ ekvivalenciareláció osztályai a racionális számok.

29. Definiáld a rendezett gyűrű fogalmát!

Állítás

Ha $k, m, n \in \mathbb{Z}$, akkor

- $k < m \Rightarrow k + n < m + n$,
- $m, n > 0 \Rightarrow m \cdot n > 0$.

Definíció

Egy R gyűrű rendezett gyűrű, ha van az R -en definiálva egy rendezés, mely kielégíti a fenti tulajdonságokat.

30. Definiáld a felső határ tulajdonságú halmaz fogalmát!

Egy X halmaz felső határ tulajdonságú, ha minden $\emptyset \neq Y \subset X$ felülről korlátos részhalmaznak van supremuma.

31. Definiáld a valós számok halmazát!

Valós számok halmazának definíciója

Legyen $\mathbb{R}$ az $\mathbb{N}$ -et tartalmazó legszűkebb felső határ tulajdonsággal rendelkező rendezett test.

32. Definiáld a homomorfizmus fogalmát!

33. Definiáld az izomorfizmus fogalmát!

Elnevezés

A művelettartó leképezést **homomorfizmusnak** nevezzük, a bijektív homomorfizmust pedig **izomorfizmusnak**.

34. Definiáld a homomorf kép fogalmát!

Definíció

Legyenek $(X; *)$ és $(Y; \circ)$ grupoidok. Az $f : X \rightarrow Y$ függvény **művelettartó**, ha $\forall a, b \in X$ esetén

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b).$$

$f(X)$ -et X **homomorf képe**nek nevezzük.

35. Mit mondhatunk homomorfizmusok/izomorfizmusok összetételéről, izomorfizmus inverzéről?

Állítás

Legyenek $f_1 : X \rightarrow Y$ és $f_2 : Y \rightarrow Z$ homomorfizmusok. Ekkor $f_2 \circ f_1$ is homomorfizmus.

Állítás

Izomorfizmus inverze izomorfizmus.

36. Milyen homomorf invariáns tulajdonságokat ismersz grupoidokkal kapcsolatosan?

Állítás

Legyen adott a $(G; \cdot)$ félcsoporth és az $f : G \rightarrow G'$ homomorfizmus. Ekkor igazak a következők.

- ① $f(G)$ félcsoporth.
- ② Ha G -ben s b.o.s.e., j.o.s.e., illetve s.e., akkor $f(G)$ -ben $f(s)$ b.o.s.e., j.o.s.e., illetve s.e.
- ③ Ha G -ben g -nek g^* b.o.i.-e, j.o.i.-e, illetve inverze, akkor $f(G)$ -ben $f(g)$ -nek $f(g^*)$ b.o.i.-e, j.o.i.-e, illetve inverze.
- ④ Ha G -ben g és h felcserélhetőek, akkor $f(G)$ -ben $f(g)$ és $f(h)$ felcserélhetőek.

Bizonyítások

- Hány semleges elem lehet egy grupoidban?

Állítás

Ha a $(G; *)$ grupoidban s_b b.o.s.e., s_j pedig j.o.s.e., akkor $s_b = s_j$.

Bizonyítás

$$s_j = s_b * s_j = s_b$$

- Hány inverze lehet egy elemnek félcsoporthban?

Állítás

Legyen $(G; *)$ egy félcsoporth az s semleges elemmel. Ha g_b bal oldali inverze g -nek, g_j pedig jobb oldali inverze, akkor $g_b = g_j$.

Bizonyítás

$$g_j = s * g_j = (g_b * g) * g_j = g_b * (g * g_j) = g_b * s = g_b$$

- Mit mondhatunk homomorfizmusok/izomorfizmusok összetételéről, izomorfizmus inverzéről?

Állítás

Legyenek $f_1 : X \rightarrow Y$ és $f_2 : Y \rightarrow Z$ homomorfizmusok. Ekkor $f_2 \circ f_1$ is homomorfizmus.

Bizonyítás

$$(f_2 \circ f_1)(ab) = f_2(f_1(ab)) = f_2(f_1(a)f_1(b)) = f_2(f_1(a))f_2(f_1(b)) = (f_2 \circ f_1)(a)(f_2 \circ f_1)(b)$$

Állítás

Izomorfizmus inverze izomorfizmus.

Bizonyítás

$$f^{-1}(f(a)f(b)) = f^{-1}(f(ab)) = ab = f^{-1}(f(a))f^{-1}(f(b))$$

- Milyen homomorf invariáns tulajdonságokat ismersz grupoidokkal kapcsolatosan?

Állítás

Legyen adott a $(G; \cdot)$ félcsoport és az $f : G \rightarrow G'$ homomorfizmus. Ekkor igazak a következők.

- 1 $f(G)$ félcsoport.
- 2 Ha G -ben s b.o.s.e., j.o.s.e., illetve s.e., akkor $f(G)$ -ben $f(s)$ b.o.s.e., j.o.s.e., illetve s.e.
- 3 Ha G -ben g -nek g^* b.o.i.-e, j.o.i.-e, illetve inverze, akkor $f(G)$ -ben $f(g)$ -nek $f(g^*)$ b.o.i.-e, j.o.i.-e, illetve inverze.
- 4 Ha G -ben g és h felcserélhetőek, akkor $f(G)$ -ben $f(g)$ és $f(h)$ felcserélhetőek.

Bizonyítás

Az egyszerűség kedvéért a G -beli elemek f szerinti képét jelölje a megfelelő $'$ -s verzió (pl. $f(g) = g'$).

- 1 $(a'b')c' = (ab)'c' = (abc)' = a'(bc)' = a'(b'c')$
- 2 $s'g' = (sg)' = g' \quad g's' = (gs)' = g'$
- 3 $g^{*'}g' = (g^*g)' = s' \quad g'g^{*'} = (gg^*)' = s'$
- 4 $g'h' = (gh)' = (hg)' = h'g'$

2. Csoportok

Tételek, definíciók

37. Definiáld a csoport fogalmát!

Definíció

A $(G; \cdot)$ grupoidot **csoportnak** nevezzük, ha

- a $\cdot$ művelet asszociatív G -n $(\forall g_1, g_2, g_3 : (g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3))$,
- létezik egységelem $(\exists e \in G : \forall g \in G : eg = ge = g)$,
- minden elemnek van inverze $(\forall g \in G : \exists g^{-1} \in G : gg^{-1} = g^{-1}g = e)$.

38. Add meg a csoport ekvivalens jellemzéseit!

Tétel

Egy $(G; \cdot)$ félcsoportra a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) $(G; \cdot)$ csoport;
- (2) Minden $a, b \in G$ esetén egyértelműen létezik az $ax = b$ és az $ya = b$ egyenletnek megoldása G -ben;
- (3) Minden $a, b \in G$ esetén létezik az $ax = b$ és az $ya = b$ egyenletnek megoldása G -ben;
- (4) Létezik $e_b \in G$ bal oldali egységelem, és minden $a \in G$ elemnek létezik e_b -re vonatkozó $a_b \in G$ balinverze $(a_b a = e_b)$.

39. Fogalmazd meg az egyszerűsítési szabályt!

Következmény (egyszerűsítési szabály)

Csoportban a művelet reguláris, vagyis $ac = bc$ esetén $a = b$, illetve $ca = cb$ esetén $a = b$.

40. Adj 3 példát csoportra!

$(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Q}; +)$, $(\mathbb{R}; +)$, $(\mathbb{C}; +)$;

41. Mit mondhatunk csoportban szorzat inverzéről?

Állítás (szorzat inverze)

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

- Add meg a csoport ekvivalens jellemzéseit!

Tétel

Egy $(G; \cdot)$ félcsoporthra a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) $(G; \cdot)$ csoport;
- (2) Minden $a, b \in G$ esetén egyértelműen létezik az $ax = b$ és az $ya = b$ egyenletnek megoldása G -ben;
- (3) Minden $a, b \in G$ esetén létezik az $ax = b$ és az $ya = b$ egyenletnek megoldása G -ben;
- (4) Létezik $e_b \in G$ bal oldali egységelem, és minden $a \in G$ elemnek létezik e_b -re vonatkozó $a_b \in G$ balinverze ($a_b a = e_b$).

A bizonyítás menete

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$$

Bizonyítás

$$(1) \Rightarrow (2)$$

Ha x megoldása az $ax = b$ egyenletnek, akkor $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$, és így $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = ex = x$ miatt $x = a^{-1}b$ (G egységelemét e jelöli).

Ráadásul $x = a^{-1}b$ valóban megoldás, hiszen

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b.$$

Az $ya = b$ egyenlet esete hasonló módon bizonyítható.

$$(2) \Rightarrow (3)$$

Nyilvánvaló.

$$(3) \Rightarrow (4)$$

Tekintsünk egy tetszőleges $a \in G$ elemet, és legyen e_b az $ya = a$ egyenlet egy megoldása. Belátjuk, hogy e_b bal oldali egységelem, vagyis minden $b \in G$ esetén $e_b b = b$. Legyen x_0 egy megoldása az $ax = b$ egyenletnek. Ekkor $e_b b = e_b(ax_0) = (e_b a)x_0 = ax_0 = b$.

Tetszőleges $c \in G$ esetén az $yc = e_b$ egyenlet egy megoldása jó lesz c -nek az e_b -re vonatkozó bal oldali inverzének.

$$(4) \Rightarrow (1)$$

Legyen e_b a bal oldali egységelem, továbbá egy tetszőleges $a \in G$ esetén a_b az e_b -re vonatkozó bal oldali inverze, valamint a'_b az a_b -nek az e_b -re vonatkozó bal oldali inverze. Ekkor

$$aa_b = (e_b a)a_b = e_b(aa_b) = (a'_b a_b)(aa_b) = a'_b(a_b a)a_b = a'_b(e_b a_b) = a'_b a_b = e_b.$$

Tehát a_b egyben jobb oldali inverze is a -nak, vagyis inverze, így tetszőleges elemnek van az e_b -re vonatkozó inverze. Belátjuk még, hogy e_b jobb oldali egységelem is, így egységelem:

$$ae_b = a(a_b a) = (aa_b)a = e_b a = a.$$

- Mit mondhatunk csoportban szorzat inverzéről?

Állítás (szorzat inverze)

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Bizonyítás

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}(eb) = b^{-1}b = e$$

3. Részcsoport

Tételek, definíciók

42. Definiáld komplexus fogalmát!

43. Definiáld a komplexusszorzást!

Definíció

Legyen $(G; \cdot)$ csoport, ekkor $\emptyset \neq K \subset G$ esetén K -t **komplexusnak** nevezzük.

A komplexusok halmazán értelmezzük a **komplexusszorzást**:

$\emptyset \neq K, M \subset G$ esetén $KM = \{km | k \in K \wedge m \in M\}$.

44. Milyen struktúrát alkot egy csoport komplexusainak halmaza a komplexusszorzással?

Állítás

Legyen $(G; \cdot)$ csoport e egységelemmel, $P = \{K | \emptyset \neq K \subset G\}$. Ekkor $(P; \cdot)$ egységelemes félcsoport $E = \{e\}$ egységelemmel.

45. Definiáld a részcsoporth fogalmát!

Definíció

Legyen $(G; \cdot)$ csoport, továbbá $\emptyset \neq H \subset G$. Ha $(H; \cdot|_{H \times H})$ csoport, akkor a $(H; \cdot|_{H \times H})$ **részcsoporthja** a $(G; \cdot)$ csoportnak.

Jelölés: $(H; \cdot|_{H \times H}) \leq (G; \cdot)$

46. Definiáld a triviális részcsoporthat/valódi részcsoporthat fogalmát!

47. Add meg a részcsoporthat ekvivalens jellemzéseit!

Tétel

Legyen $(G; \cdot)$ csoport, továbbá $H \subset G$. Az alábbi feltételek ekvivalensek:

- (1) H részcsoporthat G -nek;
- (2) a $\cdot$ leszűkítése $H \times H$ -ra egy $H \times H$ -t H -ba képező leképezés, H tartalmazza $(G; \cdot)$ egységelemét, és $H^{-1} \subset H$;
- (3) $H \neq \emptyset$, $HH \subset H$ és $H^{-1} \subset H$;
- (4) $H \neq \emptyset$ és $H^{-1}H \subset H$.

48. Mit mondhatunk részcsoporthat metszetéről?

Legyen $(G; *)$ csoport, továbbá vegyük tetszőleges számú részcsoporthatját. Ekkor ezen részcsoporthat metszete is G részcsoporthatja.

Bizonyítások

- Milyen struktúrát alkot egy csoport komplexusainak halmaza a komplexusszorzással?

Állítás

Legyen $(G; \cdot)$ csoport e egységelemmel, $P = \{K \mid \emptyset \neq K \subset G\}$. Ekkor $(P; \cdot)$ egységelemes félcsoporthat $E = \{e\}$ egységelemmel.

Bizonyítás

A komplexusszorzás definíciója alapján $(P; \cdot)$ grupoid.

$$K(MN) = \{k(mn) \mid k \in K \wedge m \in M \wedge n \in N\} =$$

$$= \{(km)n \mid k \in K \wedge m \in M \wedge n \in N\} = (KM)N$$

$$EK = \{ek \mid k \in K\} = \{k \mid k \in K\} = \{ke \mid k \in K\} = KE$$

- Add meg a részcsoporthat ekvivalens jellemzéseit!

Tétel

Legyen $(G; \cdot)$ csoport, továbbá $H \subset G$. Az alábbi feltételek ekvivalensek:

- (1) H részcsoporthat G -nek;
- (2) a $\cdot$ leszűkítése $H \times H$ -ra egy $H \times H$ -t H -ba képező leképezés, H tartalmazza $(G; \cdot)$ egységelemét, és $H^{-1} \subset H$;
- (3) $H \neq \emptyset$, $HH \subset H$ és $H^{-1} \subset H$;
- (4) $H \neq \emptyset$ és $H^{-1}H \subset H$.

Bizonyítás

(1) $\Rightarrow$ (2):

- Mivel H részcsoporth, ezért algebrai struktúra is.
- Legyen e_H H egységeleme, e_G pedig G -é. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén $he_H = h$ és $he_G = h$, így az egyszerűsítési szabály miatt $e_H = e_G$.
- Legyen $h \in H$ -nak a H -beli inverze h_H^{-1} , a G -beli pedig h_G^{-1} . Ekkor $h_G^{-1}h = e_H$ és $h_H^{-1}h = e_H$, így az egyszerűsítési szabály miatt $h_G^{-1} = h_H^{-1}$.

(2) $\Rightarrow$ (3):

Nyilvánvaló.

(3) $\Rightarrow$ (4):

$$H^{-1} \subset H \Rightarrow H^{-1}H \subset HH \subset H$$

(4) $\Rightarrow$ (1):

- $\exists h \in H \neq \emptyset \Rightarrow e_G = h^{-1}h \in H^{-1}H \subset H$
- $h^{-1} = h^{-1}e_G \in H^{-1}H \subset H$
- $h_1 \cdot h_2 = (h_1^{-1})^{-1}h_2 \in H^{-1}H \subset H$

- Mit mondhatunk részcsoporthok metszetéről?

Következmény

Legyen $(G; \cdot)$ csoport, továbbá $H_\gamma \leq G$, ahol $\gamma \in \Gamma \neq \emptyset$. Ekkor $H = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$ esetén $H \leq G$.

Bizonyítás

Legyen e az egységeleme G -nek. Minden $\gamma \in \Gamma$ esetén:

- $e \in H_\gamma$, illetve
 - $H^{-1}H \subset H_\gamma^{-1}H_\gamma \subset H_\gamma$,
- így $H \neq \emptyset$, illetve $H^{-1}H \subset H$.

4. Generátum

Tételek, definíciók

49. Definiáld a generátum fogalmát!

Legyen G csoport, K komplexus G -ben. Ekkor K generátuma a K -t tartalmazó részcsoporthok metszete. Jelölése: $\langle K \rangle$

50. Definiáld a generátorrendszer fogalmát!

Ha $\langle K \rangle = G$, azaz K generátuma kiteszi G -t, akkor K a G generátorrendszere.

51. Definiáld a ciklikus csoport fogalmát!

52. Definiáld a generátor fogalmát!

Ha $K = \{g\}$ (egyértelmű), akkor G a g elem által generált **ciklikus csoport** és g a generátor.

53. Mit mondhatunk a generátum szerkezetéről?

Ha K komplexusa a G csoportnak akkor

$$\langle K \rangle = \{k_1 \cdot \dots \cdot k_s \mid s \in \mathbb{N}, k_j \in K \cup K^{-1}, 1 \leq j \leq s\}$$

üres szorzat az egységelem!

54. Mit mondhatunk ciklikus csoport homomorf képéről?

8.1.18. Következmény. Ha $g \in G$, akkor $\langle g \rangle = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Egy ciklikus csoport homomorf képe is ciklikus, egy generátor képe generálja a homomorf képet.

55. Definiáld a csoport/elem rendjét!

Def. Csoport rendje a csoport elemeiből álló halmaz számossága. G csoport esetén ezt $|G|$ -vel vagy $O(G)$ -vel jelöljük.

$g \in G$ elem rendje a legkisebb n pozitív egész, amelyre $g^n = e$, ha nincs ilyen n , akkor ∞ .

56. Mivel lehet izomorf egy ciklikus csoport?

8.1.20. Tétel. Végtelen ciklikus csoport izomorf az egész számok additív csoportjával, míg n elemű ciklikus csoport a modulo n maradékosztályok $\mathbb{Z}_n$ additív csoportjával izomorf. Speciálisan, a ciklikus csoportok kommutatívak.

57. Milyen kapcsolat van egy elem illetve a generátumának a rendje között?

Észrevétel: $g \in G$ elem rendje megegyezik az elem által generált részcsoporth rendjével.

58. Mit mondhatunk a ciklikus csoportok szerkezetéről?

Ciklikus csoport minden részcsoporthja ciklikus.

- Mit mondhatunk a generátum szerkezetéről?

Ha K komplexusa a G csoportnak akkor

$$\langle K \rangle = \{k_1 \cdot \dots \cdot k_s \mid s \in \mathbf{N}, k_j \in K \cup K^{-1}, 1 \leq j \leq s\}$$

üres szorzat az egységelem!

Biz. Legyen

$$H = \{k_1 \cdot \dots \cdot k_s \mid s \in \mathbf{N}, k_j \in K \cup K^{-1}, 1 \leq j \leq s\}$$

1. Nyilvánvaló, hogy $H \subseteq \langle K \rangle$, mivel $\langle K \rangle$ részcsoport G -ben.

2. H is részcsoport G -ben, mivel benne van G egységeleme, zárt a szorzásra és az inverzképzésre.

továbbá, minden K -beli elemet tartalmaz

$$\Rightarrow \langle K \rangle \subseteq H$$



5. Mellékosztály, Lagrange tétele és következményei

Tételek, definíciók

59. Definiáld a mellékosztály fogalmát!

Legyen G csoport, $H \leq G$ és $a \sim b$, ha $ab^{-1} \in H$, valamely $a, b \in G$ -re.

60. Definiáld részcsoporth indexét!

Def. Legyen G csoport, $H \leq G$. A H szerinti mellékosztályok halmazának számossága **H indexe G -ben**. Jelölése: $|G : H|$, $[G : H]$.

61. Hogyan szól Lagrange tétele?

Legyen G véges csoport és $H \leq G$. H rendjének és G -beli indexének a szorzata egyenlő G rendjével.

62. Milyen kapcsolat van egy elem rendje és a csoport rendje között?

1. Véges csoportban elem rendje osztója a csoport rendjének.

63. Milyen kapcsolat van prímszámrendű csoport és ciklikus csoport között?

Prímszámrendű csoport ciklikus.

64. Add meg a prímszámrendű csoportok egy ekvivalens jellemzését!

Egy nem egyelemű csoport akkor és csak akkor **prímszámrendű**, ha csak triviális részcsoporthja van.

Bizonyítások

• Hogyan szól Lagrange tétele?

Legyen G véges csoport és $H \leq G$. H rendjének és G -beli indexének a szorzata egyenlő G rendjével.

Biz.

$$|G| = \sum_{r \in R} |rH|,$$

ahol R egy bal oldali reprezentánsrendszere H -nak.

Legyen $\varphi(h) = ah \Rightarrow \varphi$ egy bijekció H és aH között, mert

szürjektív: minden $ah \in aH$ -nak az őse: $h \in H$,

injektív: tfh $ah_1 = ah_2$, valamely $h_1, h_2 \in H$ -ra

regularitás $\Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow |H| = |rH|$

$$\Rightarrow |G| = |H| \cdot |R| = |H| |G : H|$$



- Milyen kapcsolat van prímszámrendű csoport és ciklikus csoport között?
2. Prímszámrendű csoport ciklikus.

Biz. Tfh $|G| = p$, p prím.
 $\Rightarrow \exists a (\neq e) \in G$

Lagrange-tétel $\Rightarrow |a| \mid |G|$

Tehát $|a|$ csak p vagy 1 lehet, és így az a elem generálja az egész G csoportot, tehát G ciklikus.

Megjegyzés: Az egységelem kivételével bármelyik eleme generálja G -t.

- Add meg a prímszámrendű csoportok egy ekvivalens jellemzését!
Egy nem egyelemű csoport akkor és csak akkor **prímszámrendű**, ha csak triviális részcsoportja van.

Biz.

$\Rightarrow$: Előző megjegyzés $\Rightarrow$

ha G prímszámrendű, akkor ciklikus és a részcsoportok:

$\{e\}$ és maga a G .

$\Leftarrow$: Tfh G olyan csoport, amelynek pontosan két részcsoportja van, és legyen $a \in G$, $a \neq e$.

$$\Rightarrow \langle a \rangle = G$$

$\Rightarrow G$ ciklikus.

1. Kérdés: Lehet-e $|G| = \infty$?

Válasz: **nem**, mert akkor pl. a^n valódi részcsoportot generálna G -ben.

2. Kérdés: Lehet-e $|G| = \text{nem prím}$?

Válasz: **nem**, mert ha $|G| = n_1 n_2 \dots n_k$, ahol $n_i > 1$, akkor

$$\langle a^{n_i} \rangle \leq G, \quad \text{mert} \quad (a^{n_i})^{n_1 n_2 \dots n_{i-1} n_{i+1} \dots n_k} = e.$$



6. Normálosztó, homomorfizmustétel

Tételek, definíciók

65. Definiáld a normálosztó fogalmát!

Definíció

Legyen $(G; \cdot)$ csoport, továbbá $N \leq G$. Ha minden $a \in G$ esetén $aN = Na$, akkor N -et **normálosztónak** (**normális részcsoporthnak**, **invariáns részcsoporthnak**) nevezzük, és az $N \triangleleft G$ jelölést használjuk.

66. Definiáld a triviális/valódi normálosztó fogalmát!

Megjegyzés

Ha N normálosztó, akkor a bal oldali és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek.

Ez fordítva is igaz: ha a bal oldali és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, akkor minden $a \in G$ esetén $aN = Na$, hiszen a mindkettőnek eleme.

67. Mit mondhatunk 2 indexű részcsoporthokról?

Következmény

Kettő indexű részcsoporth mindig normálosztó.

68. Add meg a normálosztók ekvivalens jellemzéseit!

Tétel

Legyen $(G; \cdot)$ csoport, továbbá $N \leq G$. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) N normálosztó;
- (2) $a^{-1}Na = N$ minden $a \in G$ -re;
- (3) $a^{-1}Na \subset N$ minden $a \in G$ -re.

69. Mit mondhatunk normálosztók metszetéről?

Következmény

Ha N_γ , $\gamma \in \Gamma$ a $(G; \cdot)$ csoport normálosztóinak egy rendszere, akkor $N = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} N_\gamma$ is normálosztó.

70. Milyen kapcsolat van normálosztók és a művelettel kompatibilis osztályok között?

Tétel

Legyen $(G; \cdot)$ csoport. Ekkor

- (1) egy N normálosztó szerinti mellékosztályok G -nek a művelettel kompatibilis osztályozását alkotják;
- (2) egy N normálosztó szerinti mellékosztályok közötti művelet megegyezik az osztályok mint halmazok komplexusszorzásával;
- (3) minden a művelettel kompatibilis osztályozás esetén az egységelem osztálya normálosztó, és az osztályozás ezen normálosztó szerinti mellékosztályokból áll.

71. Definiáld a faktorcsoport fogalmát! Adj 2 példát!

Def. A G csoport N normálosztója szerinti mellékosztályok a komplexusszorzással G/N szerinti faktorcsoportját alkotják (G/N).

72. Definiáld a homomorfizmus magját!

8.1.38. Homomorfizmus magja. Egy G csoportnak egy G' csoportba való φ homomorfizmusánál a *homomorfizmus magján* a G' csoport e' egységelemének a teljes inverz képét értjük. A φ magját $\ker(\varphi)$ -vel jelöljük.

73. Hogyan szól a homomorfizmustétel?

8.1.39. Homomorfizmustétel. Egy G csoport egy φ homomorfizmusánál a *homomorfizmus magja* normálosztó, és a $G/\ker(\varphi)$ faktorcsoport izomorf $G' = \varphi(G)$ -vel. A G bármely N normálosztója magja valamely homomorfizmusnak: G -nek G/N -re való kanonikus leképezése homomorfizmus, amelynek magja N .

Bizonyítások

- Add meg a normálosztók ekvivalens jellemzéseit!

Tétel

Legyen $(G; \cdot)$ csoport, továbbá $N \leq G$. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) N normálosztó;
- (2) $a^{-1}Na = N$ minden $a \in G$ -re;
- (3) $a^{-1}Na \subset N$ minden $a \in G$ -re.

Bizonyítás

- (1) $\Rightarrow$ (2): $a^{-1}Na = a^{-1} \cdot Na = a^{-1} \cdot aN = (a^{-1}a)N = N$
(2) $\Rightarrow$ (1): $Na = (aa^{-1})Na = a(a^{-1}Na) = aN$
(2) $\Rightarrow$ (3): nyilvánvaló
(3) $\Rightarrow$ (2): $(a^{-1})^{-1}N(a^{-1}) \subset N \Rightarrow N = a^{-1}(aN a^{-1})a \subset a^{-1}Na$

- Mit mondhatunk normálosztók metszetéről?

Következmény

Ha N_γ , $\gamma \in \Gamma$ a $(G; \cdot)$ csoport normálosztóinak egy rendszere, akkor $N = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} N_\gamma$ is normálosztó.

Bizonyítás

$a^{-1}Na \subset a^{-1}N_\gamma a \subset N_\gamma$ minden $\gamma \in \Gamma$ -ra, így $a^{-1}Na \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} N_\gamma = N$.

- Milyen kapcsolat van normálosztók és a művelettel kompatibilis osztályok között?

Tétel

Legyen $(G; \cdot)$ csoport. Ekkor

- (1) egy N normálosztó szerinti mellékosztályok G -nek a művelettel kompatibilis osztályozását alkotják;
- (2) egy N normálosztó szerinti mellékosztályok közötti művelet megegyezik az osztályok mint halmazok komplexusszorzásával;
- (3) minden a művelettel kompatibilis osztályozás esetén az egységelem osztálya normálosztó, és az osztályozás ezen normálosztó szerinti mellékosztályokból áll.

Bizonyítás

(1) Legyen $a' \in Na$ és $b' \in Nb$ (vagyis $a' \sim a$ és $b' \sim b$). Ekkor:

$$a'b' \in (Na)(Nb) = N(aN)b = N(Na)b = N^2ab = Nab$$

(2)

$$\{a'b' | a' \in Na \wedge b' \in Nb\} = NaNb = Nab$$

(3) Legyen $\sim$ a szorzással kompatibilis ekvivalenciareláció, és jelölje N az e egységelem osztályát. Ekkor $a \in N$ esetén $e = a^{-1}a \sim a^{-1}e = a^{-1}$, tehát $N^{-1} \subset N$. Ha $a, b \in N$, akkor $ab \sim ee = e$, így $NN \subset N$, vagyis $N \leq G$. $a \in N$ és $g \in G$ esetén $g^{-1}ag \sim g^{-1}eg = e$, tehát $g^{-1}Ng \subset N$, ezért $N \triangleleft G$.

Ha $a \sim b$, akkor $a^{-1} = a^{-1}bb^{-1} \sim a^{-1}ab^{-1} = b^{-1}$, és így $e = aa^{-1} \sim ab^{-1}$, vagyis $ab^{-1} \in N$.

Megfordítva, ha $ab^{-1} \in N$, azaz $ab^{-1} \sim e$, akkor $a = ab^{-1}b \sim eb = b$. Tehát a $\sim$ ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozás pontosan az N szerinti osztályokból áll.

• Hogyan szól a homomorfizmustétel?

8.1.39. Homomorfizmustétel. Egy G csoport egy φ homomorfizmusánál a homomorfizmus magja normálosztó, és a $G/\ker(\varphi)$ faktorcsoporthoz izomorf $G' = \varphi(G)$ -vel. A G bármely N normálosztója magja valamely homomorfizmusnak: G -nek G/N -re való kanonikus leképezése homomorfizmus, amelynek magja N .

Biz.

63

A $\varphi^{-1}(a')$, $a' \in G'$ halmazrendszer a G egy osztályozása

Kompatibilis a szorzással?

Ha $a \in \varphi^{-1}(a')$ és $b \in \varphi^{-1}(b') \Rightarrow$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = a'b'$$

$$\Rightarrow ab \in \varphi^{-1}(a'b')$$

szerinti

Előző tétel (2) pont $\Rightarrow e$ osztálya, azaz $\ker(\varphi)$, normálosztó $\Rightarrow$

Az $a' \mapsto \varphi^{-1}(a')$ leképezés G' izomorfizmusa $G/\ker(\varphi)$ -re.

Tétel második fele 8.1.35. bizonyítása alapján trivi.



7. Gráfok alapfogalmai

Tételek, definíciók

74. Definiáld az irányítatlan gráf fogalmát!

Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ hármast (irányítatlan) gráfnak nevezzük, ha E, V halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\varphi: E \rightarrow \{\{v, v'\} \mid v, v' \in V\}$.

E -t az **élek halmazának**, V -t a **csúcsok (pontok) halmazának** és φ -t az **illeszkedési leképezésnek** nevezzük. A φ leképezés E minden egyes eleméhez egy V -beli rendezetlen párt rendel.

75. Definiáld az illeszkedik és végpontja fogalmakat!

Elnevezés

$v \in \varphi(e)$ esetén e **illeszkedik** v -re, illetve v **végpontja** e -nek.

76. Definiáld az illeszkedési relációt!

Megjegyzés

Az illeszkedési leképezés meghatározza az $I \subset E \times V$ **illeszkedési relációt**:
 $(e, v) \in I \Leftrightarrow v \in \varphi(e)$.

77. Definiáld a véges/végtelen gráf fogalmát!

78. Definiáld az üres gráf fogalmát!

Definíció

Ha E és V is véges halmazok, akkor a gráfot **véges gráfnak** nevezzük, egyébként **végtelen gráfnak**.

$E = \emptyset$ esetén **üres gráfról** beszélünk.

79. Definiáld a hurokél fogalmát!

80. Definiáld a párhuzamos él fogalmát!

81. Definiáld az egyszerű gráf fogalmát!

Definíció

Ha egy él egyetlen csúcsra illeszkedik, azt **hurokélnek** nevezzük.

Ha $e \neq e'$ esetén $\varphi(e) = \varphi(e')$, akkor e és e' **párhuzamos élek**.

Ha egy gráfban nincs sem hurokél, sem párhuzamos élek, akkor azt **egyszerű gráfnak** nevezzük.

82. Definiáld a szomszédos él/csúcs fogalmát!

Definíció

Az $e \neq e'$ élek **szomszédosak**, ha van olyan $v \in V$, amelyre $v \in \varphi(e)$ és $v \in \varphi(e')$ egyszerre teljesül. A $v \neq v'$ csúcsok **szomszédosak**, ha van olyan $e \in E$, amelyre $v \in \varphi(e)$ és $v' \in \varphi(e)$ egyszerre teljesül.

83. Definiáld gráfban a fokszám fogalmát!

Definíció

A v csúcs **fokszámán** (vagy **fokán**) a rá illeszkedő élek számát értjük, a hurokéleket kétszer számolva.

Jelölése: $d(v)$ vagy $\deg(v)$.

84. Definiáld az izolált csúcs fogalmát!

Definíció

Ha $d(v) = 0$, akkor v -t **izolált csúcsnak** nevezzük.

85. Definiáld az n -reguláris gráf fogalmát!

86. Definiáld a reguláris gráf fogalmát!

Definíció

Ha egy gráf minden csúcsának a foka n , akkor azt **n -reguláris** gráfnak hívjuk. Egy gráfot **regulárisnak** nevezünk, ha valamely n -re n -reguláris.

87. Mit mondhatunk irányítatlan gráfban a fokszámok összegéről?

Állítás

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfra

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

88. Mikor nevezünk két gráfot izomorfnak?

Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ és $G' = (\varphi', E', V')$ gráfok **izomorfak**, ha léteznek $f: E \rightarrow E'$ és $g: V \rightarrow V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$ -re és $v \in V$ -re e pontosan akkor illeszkedik v -re, ha $f(e)$ illeszkedik $g(v)$ -re.

89. Definiáld a teljes gráf fogalmát!

90. Mit mondhatunk teljes gráf élszámáról?

Megjegyzés

Az n csúcsú teljes gráfnak $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ éle van, és K_n -nel jelöljük.

91. Mit jelentenek a C_n, P_n, S_n rövidítések?

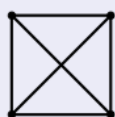
Definíció

A C_n ciklus csúcsai egy szabályos n -szög csúcspontjai, és pontosan a szomszédos csúcspontoknak megfelelő csúcsok szomszédosak.

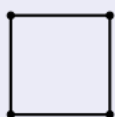
A P_n ösvény C_{n+1} -ből valamely él törlésével adódik.

Az S_n csillagban egy szabályos n -szög csúcspontjainak és középpontjának megfelelő csúcsok közül a középpontnak megfelelő csúcs szomszédos az összes többivel.

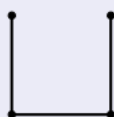
Példák



K_4



C_4



P_3



S_4

92. Definiáld a páros gráf fogalmát!

Definíció

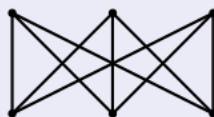
A $G = (V, E, V)$ gráfot páros gráfnak nevezzük, ha V -nek létezik V' és V'' diszjunkt halmazokra való felbontása úgy, hogy minden él egyik végpontja V' -nek, másik végpontja pedig V'' -nek eleme.

93. Mit jelent a $K_{m,n}$ rövidítés?

Definíció

Azt az egyszerű páros gráfot, amelyben $|V'| = m$, $|V''| = n$ és minden V' -beli csúcs minden V'' -beli csúccsal szomszédos, $K_{m,n}$ -nel jelöljük.

Példa



$K_{3,3}$

94. Definiáld a részgráf fogalmát!

95. Definiáld a feszített/telített részgráf fogalmát!

Definíció

A $G' = (\varphi', E', V')$ gráfot a $G = (\varphi, E, V)$ gráf **részgráfjának** nevezzük, ha $E' \subset E$, $V' \subset V$ és $\varphi' \subset \varphi$. Ekkor G -t a G' **szupergráfjának** hívjuk. Ha a G' részgráf mindazokat az éleket tartalmazza, melyek végpontjai V' -ben vannak, akkor G' -t a V' által meghatározott **feszített** (vagy **telített**) részgráfnak nevezzük.

96. Definiáld irányítatlan gráf komplementerének fogalmát!

Definíció

Ha $G' = (\varphi', E', V')$ részgráfja a $G = (\varphi, E, V)$ gráfnak, akkor a G' -nek a G -re vonatkozó **komplementerén** a $(\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráfot értjük.

97. Definiáld az élek/csúcsok törlésével kapott gráfot!

Definíció

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, és $E' \subset E$, akkor a G -ből az E' **élhalmaz törlésével** kapott gráfon a $G' = (\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ részgráfot értjük.

Definíció

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, és $V' \subset V$, akkor legyen E' az összes olyan élek halmaza, amelyek illeszkednek valamely V' -beli csúcsra. A G -ből a V' **csúcshalmaz törlésével** kapott gráfon a $G' = (\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V \setminus V')$ részgráfot értjük.

98. Definiáld a séta fogalmát!

99. Hogyan definiáljuk a séta hosszát?

100. Mikor nevezünk egy sétát zártnak/nyíltnak?

Definíció

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf. A

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozatot **sétának** nevezzük v_0 -ból v_n -be, ha

- $v_j \in V \quad 0 \leq j \leq n$,
- $e_k \in E \quad 1 \leq k \leq n$,
- $\varphi(e_l) = \{v_{l-1}, v_l\} \quad 1 \leq l \leq n$.

A **séta hossza** a benne szereplő élek száma (n).

Ha $v_0 = v_n$, akkor **zárt sétáról** beszélünk, különben **nyílt sétáról**.

101. Definiáld a vonal fogalmát!

Definíció

Ha a sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor **vonálnak** nevezzük. Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt vonalról.

102. Definiáld az út fogalmát!

Definíció

Ha a sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor **útnak** nevezzük.

103. Definiáld a kör fogalmát!

Definíció

Egy legalább egy hosszú zárt vonalat **körnek** nevezünk, ha a kezdő- és végpont megegyeznek, de egyébként a vonal pontjai különböznek.

104. Mit állíthatunk séta és út kapcsolatáról?

Állítás

Egy G gráfban a különböző v és v' csúcsokat összekötő sétából alkalmasan törölve éleket és csúcsokat a v -t v' -vel összekötő utat kapunk.

105. Definiáld az összefüggés fogalmát!

Definíció

Egy gráfot **összefüggőnek** nevezünk, ha bármely két csúcsa összeköthető sétával.

106. Definiáld a komponens fogalmát!

A $G = (\varphi, E, V)$ gráf esetén V elemeire vezessük be a $\sim$ relációt: $v \sim v'$ pontosan akkor, ha G -ben vezet út v -ből v' -be.

A $\sim$ ekvivalenciareláció (Miért?), így meghatároz egy osztályozást V -n.

A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített részgráf a gráf egy **komponense**.

107. Mi a kapcsolat egy gráf komponenseinek a száma és az összefüggősége között?

Megjegyzés

Egy gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha minden csúcs ugyanabba az osztályba tartozik, azaz ha csak egyetlen komponense van.

- Mit mondhatunk irányítatlan gráfban a fokszámok összegéről?

Állítás

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfra

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Bizonyítás

Élszám szerinti teljes indukció: $|E| = 0$ esetén mindkét oldal 0. Tfh. $|E| = n$ esetén igaz az állítás. Ha adott egy gráf, amelynek $n + 1$ éle van, akkor annak egy élét elhagyva egy n élű gráfot kapunk. Erre teljesül az állítás az indukciós feltevés miatt. Az elhagyott élt újra hozzávéve a gráfhoz az egyenlőség mindkét oldala 2-vel nő.

- Mit állíthatunk séta és út kapcsolatáról?

Állítás

Egy G gráfban a különböző v és v' csúcsokat összekötő sétából alkalmasan törölve éleket és csúcsokat a v -t v' -vel összekötő utat kapunk.

Bizonyítás

Legyen az állításban szereplő séta a következő:

$$v = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n = v'.$$

Ha valamely $i < j$ esetén $v_i = v_j$, akkor töröljük az

$$e_{i+1}, v_{i+1}, e_{i+2}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}, e_j, v_j$$

részt, és ismételjük ezt, amíg van csúcsismétlődés. Ha már nincs, akkor utat kaptunk, és mivel minden lépésben csökken a séta hossza, ezért az eljárás véges sok lépésben véget ér.

8. Fák

Tételek, definíciók

108. Definiáld a fa fogalmát!

Definíció

Egy gráfot **fának** nevezünk, ha összefüggő és körmentes.

109. Add meg 3 ekvivalens jellemzését a fa fogalmának!

110. Fogalmazd meg két olyan szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy véges egyszerű gráf fa, amelyben szerepel az élek száma!

Tétel

Egy G egyszerű gráfra, amelynek n csúcsa van ($n \in \mathbb{Z}^+$) a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) G fa;
- (2) G -ben nincs kör, és $n - 1$ éle van;
- (3) G összefüggő, és $n - 1$ éle van.

111. Mit mondhatunk körmentes gráfban elsőfokú csúcsokról?

Lemma

Ha egy G véges gráfban nincs kör, de van él, akkor G -nek van legalább 2 elsőfokú csúcsa.

Bizonyítások

- Mit mondhatunk körmentes gráfban elsőfokú csúcsokról?

Lemma

Ha egy G véges gráfban nincs kör, de van él, akkor G -nek van legalább 2 elsőfokú csúcsa.

Bizonyítás

A G -beli utak között van maximális hosszúságú (hiszen G véges), és a hossza legalább 1, így a végpontjai különbözőek. Megmutatjuk, hogy ezek elsőfokúak. Legyen az említett út: $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$. Ha lenne az e_1 -től különböző v_0 -ra illeszkedő e él, annak másik végpontja (v') nem lehet az útban szereplő csúcsoktól különböző, mert akkor $v', e, v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ út hossza nagyobb lenne, mint a maximális út hossza. Ha viszont e másik végpontja az út valamely v_k csúcsa, akkor $v_k, e, v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ kör lenne, ami szintén ellentmondás.

- Add meg 3 ekvivalens jellemzését a fa fogalmának!

Tétel

Egy G egyszerű gráfra, amelynek n csúcsa van ($n \in \mathbb{Z}^+$) a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) G fa;
- (2) G -ben nincs kör, és $n - 1$ éle van;
- (3) G összefüggő, és $n - 1$ éle van.

Bizonyítás

$n = 1$ esetén az állítás triviális. (Miért?)

(1) $\Rightarrow$ (2): n szerinti TI: tfh. $n = k$ -ra igaz az állítás. Tekintsünk egy $k + 1$ csúcsú G fát. Ennek legyen v egy olyan csúcsa, aminek a foka 1. (Miért van ilyen?) Hagyjuk el a gráfból v -t. Az így kapott gráf, G' nyilván körmentes. Összefüggő is lesz, hiszen v egy G -beli útnak csak kezdő- vagy végpontja lehet, így a G' tetszőleges v' és v'' csúcsa közti G -beli út nem tartalmazhatja sem v -t, sem a rá illeszkedő élt, így G' -beli út is lesz egyben. Tehát G' fa, ezért alkalmazva az indukciós feltevést $k - 1$ éle van. és így G -nek k éle van.

(2) $\Rightarrow$ (3): n szerinti TI: tfh. $n = k$ -ra igaz az állítás. Tekintsünk egy $k + 1$ csúcsú körmentes G gráfot, aminek k éle van. Ennek legyen v egy olyan csúcsa, aminek a foka 1. (Miért van ilyen?) Hagyjuk el a gráfból v -t. Az így kapott G' gráf az indukciós feltevés miatt összefüggő, tehát tetszőleges v' és v'' csúcsa között vezet út G' -ben, ami tekinthető G -beli útnak is. G' tetszőleges csúcsa és v közötti utat úgy kaphatunk, hogy az adott csúcs és a v -vel szomszédos csúcs közötti utat kiegészítjük az elhagyott éllel és v -vel.

(3) $\Rightarrow$ (1): Ha a feltételnek eleget tevő gráfban van kör, akkor az abban szereplő tetszőleges él elhagyásával összefüggő gráfot kapunk. (Miért?) Folytassuk az élek törlését, amíg már nincs több kör a kapott gráfban, tehát fa lesz. Ha k élt hagytunk el, akkor a kapott gráfnak $n - 1 - k$ éle van, ugyanakkor az (1) $\Rightarrow$ (2) rész miatt a kapott fának $n - 1$ éle van, így $k = 0$, tehát a gráfunkban nem volt kör, így fa.

9. Feszítőfa, Euler-vonal, Hamilton-kör

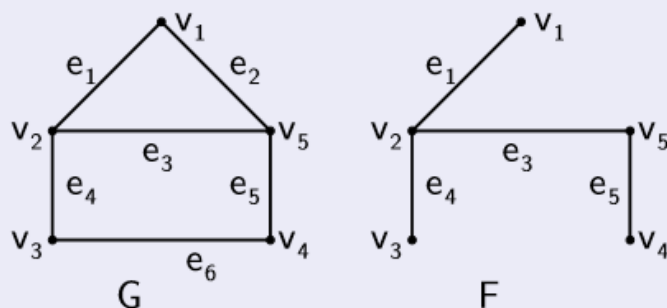
Tételek, definíciók

112. Definiáld a feszítőfa fogalmát!

Definíció

A G gráf egy F részgráfját a **feszítőfájának** nevezzük, ha a csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával, és fa.

Példa



113. Mikor létezik feszítőfája egy gráfnak?

Állítás

Minden összefüggő véges gráfnak létezik feszítőfája.

114. Mit mondhatunk összefüggő gráfban a körök számáról?

Állítás

Egy $G = (V, E)$ összefüggő véges gráfban létezik legalább $|E| - |V| + 1$ kör, amelyek élhalmaza különböző.

115. Definiáld az erdő fogalmát!
116. Definiáld a feszítőerdő fogalmát!
117. Mit mondhatunk erdő élszámáról?

Definíció

Egy körmentes gráfot **erdőnek** nevezünk.
Egy gráfnak olyan részgráfját, ami minden komponensből egy feszítőfát tartalmaz, **feszítőerdőnek** nevezzük.

Állítás

Tetszőleges gráfnak létezik feszítőerdeje.

Állítás

Egy véges erdő éleinek száma a csúcsainak és komponenseinek számának különbsége.

118. Definiáld az Euler-vonal fogalmát!

Definíció

Egy gráfban az olyan vonalat, amelyben a gráf minden éle szerepel, **Euler-vonalnak** nevezzük.

119. Mit állíthatunk összefüggő gráfban zárt Euler-vonal létezésével kapcsolatban?

Állítás

Egy összefüggő véges gráfban pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha minden csúcs foka páros.

120. Definiáld a Hamilton-út/kör fogalmát!

Definíció

Egy gráfban az olyan utat, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel, **Hamilton-útnak** nevezzük.
Egy gráfban az olyan kört, amelyben a gráf minden csúcsa szerepel, **Hamilton-körnek** nevezzük.

121. Adj meg egy elégséges feltételt Hamilton-kör létezéséről!

Tétel (Dirac)

Ha a $G = (V, E, V)$ gráfra $|V| > 2$, és minden csúcsának a foka legalább $|V|/2$, akkor van Hamilton-köre.

- Mikor létezik feszítőfája egy gráfnak?

Állítás

Minden összefüggő véges gráfnak létezik feszítőfája.

Bizonyítás

Amíg van kör a gráfban, hagyjuk el annak egy élét. A kapott gráf összefüggő marad. Véges sok lépésben fát kapunk.

- Mit mondhatunk összefüggő gráfban a körök számáról?

Állítás

Egy $G = (V, E, V)$ összefüggő véges gráfban létezik legalább $|E| - |V| + 1$ kör, amelyek élhalmaza különböző.

Bizonyítás

Tekintsük G -nek egy F feszítőfáját. Ennek $|V| - 1$ éle van. Jelöljük E' -vel G azon éleinek halmazát, amelyek nem élei F -nek. $e \in E'$ -t hozzávéve F -hez keletkezik egy K_e kör (Miért?), ami kör G -ben. A K_e kör tartalmazza e -t (Miért?), és $e \neq e' \in E'$ esetén $K_{e'}$ nem tartalmazza e -t. Így kapunk $|E| - |V| + 1$ kört, amiknek az élhalmaza különböző.

- Mit állíthatunk összefüggő gráfban zárt Euler-vonal létezésével kapcsolatban?

Állítás

Egy összefüggő véges gráfban pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha minden csúcs foka páros.

Bizonyítás

$\Rightarrow$: Legyen a zárt Euler-vonal a következő:

$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_0$.

A vonal kezdő- és végpontját leszámítva egy csúcs minden előfordulása esetén a mellette lévő két különböző él 2-vel járul hozzá a fokszámához. A kezdő- és végpont ugyanaz, ezért ennek is páros lesz a foka.

Bizonyítás

$\Leftarrow$: a bizonyítás konstruktív. Induljunk ki egy élt nem tartalmazó zárt vonalból (v). Ha az eddig kapott zárt vonalban nem minden él szerepel, akkor az összefüggőség miatt van olyan csúcs (v'), amelyre illeszkedő élek közül nem szerepel mindegyik. Induljunk el ebből a csúcsból egy fel nem használt élen, és haladjunk tovább mindig fel nem használt éleken. Mivel minden csúcsra páros sok fel nem használt él illeszkedik, a továbbhaladás csak akkor nem lehetséges, ha visszaértünk v' -be. Ha most az eredeti vonalon elmegyünk v -ből v' -be, az új vonalon körbemegyünk, majd az eredeti vonalon haladunk tovább, akkor az eredeti vonalnál hosszabb zárt vonalat kapunk, így ezt az eljárást ismételve véges sok lépésben megkapunk egy Euler-vonalat.

10. Címkezett gráfok

Tételek, definíciók

122. Definiáld a címkezett gráf, élcímkezett/csúcscímkezett gráf fogalmát!

Definíció

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, C_e és C_v halmazok az **élcímkek**, illetve **csúcscímkek** halmaza, továbbá $c_e: E \rightarrow C_e$ és $c_v: V \rightarrow C_v$ leképezések az **élcímkezés**, illetve **csúcscímkezés**. Ekkor a $(\varphi, E, V, c_e, C_e, c_v, C_v)$ hetest címkezett gráfnak nevezzük.

Definíció

Élcímkezett, illetve **csúcscímkezett** gráfról beszélünk, ha csak élcímkek és élcímkezés, illetve csúcscímkek és csúcscímkezés adott.

Megjegyzés

Címkezett gráf helyett a **színezett gráf** elnevezés is használatos.

123. Definiáld az élsúlyozás/csúcssúlyozás fogalmát!

Definíció

$C_e = \mathbb{R}$, illetve $C_v = \mathbb{R}$ esetén **élsúlyozásról** és **élsúlyozott gráfról**, illetve **csúcssúlyozásról** és **csúcssúlyozott gráfról** beszélünk, és a jelölésből C_e -t, illetve C_v -t elhagyjuk.

124. Definiáld az élhalmaz súlyát!

Definíció

Egy $G = (\varphi, E, V, w)$ élsúlyozott gráfban az $E' \subset E$ élhalmaz súlya $\sum_{e \in E'} w(e)$.

125. Ismertesd a Kruskal-algoritmust és a rá vonatkozó tételt!

Algoritmus(Kruskal)

Egy élsúlyozott gráf esetén az összes csúcsot tartalmazó üres részgráfból kiindulva minden lépésben vegyük hozzá a minimális súlyú olyan élt, amivel nem keletkezik kör.

Tétel

A Kruskal-algoritmus egy minimális súlyú feszítőerdőt határoz meg. Összefüggő gráf esetén minimális súlyú feszítőfát kapunk.

126. Definiáld a mohó algoritmus fogalmát, adj példát, amikor nem ad optimális megoldást!

Definíció

Egy algoritmust **mohó algoritmusnak** nevezünk, ha minden lépésben az adódó lehetőségek közül az adott lépésben legkedvezőbbek egyikét választja.

Megjegyzés

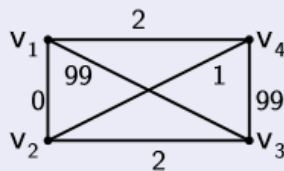
A Kruskal-algoritmus egy mohó algoritmus.

Megjegyzés

A mohó algoritmus nem mindig optimális.

Példa

Keressünk minimális összsúlyú Hamilton-kört a következő gráfban.



Bizonyítások

- Ismertesd a Kruskal-algoritmust és a rá vonatkozó tételt!

Tétel

A Kruskal-algoritmus egy minimális súlyú feszítőerdőt határoz meg. Összefüggő gráf esetén minimális súlyú feszítőfát kapunk.

Bizonyítás

Elég összefüggő gráfra bizonyítani (Miért?).

Összefüggő gráf esetén az algoritmus nyilván feszítőfát eredményez (Miért?).

Indirekt tfh. van az algoritmus által meghatározott F feszítőfánál kisebb súlyú F' feszítőfája a gráfnak. Ha több ilyen van, akkor válasszuk közülük azt, amelyiknek a legtöbb közös éle van F -fel. Legyen e' olyan éle F' -nek, ami nem éle F -nek. (Miért van ilyen?) Az F -hez e' hozzávételével kapott gráfban van egy K kör (Miért?). Ezen kör tetszőleges e élére $w(e) \leq w(e')$ (Miért?). Az F' -ből az e' törlésével kapott gráf nem összefüggő (Miért?), és pontosan 2 komponense van (Miért?). A K -nak van olyan éle (e''), aminek a végpontjai az F' -ből az e' törlésével kapott gráf különböző komponenseiben vannak (Miért?).

Biz.folyt.

Tekintsük azt a gráfot, amit F' -ből az e' törlésével és az e'' hozzávételével kapunk. Az így kapott gráf is feszítőfa (Miért?), és $w(e'') < w(e')$ esetén kisebb súlyú, mint F' , míg $w(e'') = w(e')$ esetén ugyanakkora súlyú, de több közös éle van F -fel. Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk.

11. Irányított gráfok

Tételek, definíciók

127. Definiáld az irányított gráf fogalmát!

Definíció

A $G = (\psi, E, V)$ hármast **irányított gráfnak** nevezzük, ha E, V halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\psi: E \rightarrow V \times V$.

E -t az **élek halmazának**, V -t a **csúcsok (pontok) halmazának** és ψ -t az **illeszkedési leképezésnek** nevezzük. A ψ leképezés E minden egyes eleméhez egy V -beli rendezett párt rendel.

128. Definiáld a kezdőpontja és végpontja fogalmakat!

Elnevezés

$\psi(e) = (v, v')$ esetén azt mondjuk, hogy v **kezdőpontja**, v' pedig **végpontja** e -nek.

129. Hogyan kaphatunk irányított gráfból irányítatlant?

130. Definiáld az irányítás fogalmát!

Definíció

Bármely $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfból kapható egy $G' = (\varphi, E, V)$ irányítatlan gráf úgy, hogy $\psi(e) = (v, v')$ esetén $\varphi(e)$ -t $\{v, v'\}$ -nek definiáljuk.

Ekkor azt mondjuk, hogy G a G' egy **irányítása**.

131. Definiáld a szigorúan párhuzamos élek fogalmát!

Definíció

Ha $e \neq e'$ esetén $\psi(e) = \psi(e')$, akkor e és e' **szigorúan párhuzamos élek**.

132. Definiáld a kifok/befok fogalmát!

133. Definiáld a nyelő/forrás fogalmát!

Definíció

Azon élek számát, amiknek a v csúcs kezdőpontja, v **kifokának** nevezzük, és $\deg^+(v)$ -vel vagy $d^+(v)$ -vel jelöljük.

Azon élek számát, amiknek a v csúcs végpontja, v **befokának** nevezzük, és $\deg^-(v)$ -vel vagy $d^-(v)$ -vel jelöljük.

Ha egy csúcs kifoka 0, akkor **nyelőnek**, ha a befoka 0, akkor **forrásnak** nevezzük.

134. Mit mondhatunk foksámösszegeiről irányított gráfban?

Állítás

A $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfra

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$

135. Mikor nevezhetünk két irányított gráfot izomorfának?

Definíció

A $G = (\psi, E, V)$ és $G' = (\psi', E', V')$ irányított gráfok **izomorfak**, ha léteznek $f: E \rightarrow E'$ és $g: V \rightarrow V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$ -re és $v \in V$ -re v pontosan akkor kezdőpontja e -nek, ha $g(v)$ kezdőpontja $f(e)$ -nek, és v pontosan akkor végpontja e -nek, ha $g(v)$ végpontja $f(e)$ -nek.

136. Mit jelentenek a $\vec{C}_n, \vec{P}_n, \vec{S}_n, \vec{K}_n$ rövidítések?

Definíció

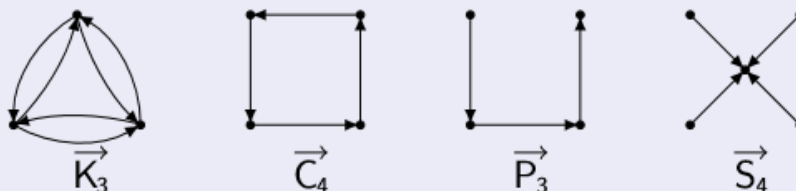
A $\vec{C}_n$ **irányított ciklus** a C_n ciklus olyan irányítása, melyben az élek irányítása azonos (minden csúcs befoka és kifoka is 1).

A $\vec{P}_n$ **irányított ösvény** $\vec{C}_{n+1}$ -ből valamely él törlésével adódik.

Az $\vec{S}_n$ **irányított csillag** az S_n csillag olyan irányítása, melyben a középső csúcs nyelő, az összes többi pedig forrás.

Adott csúcshalmaznál az **irányított teljes gráfban** tetszőleges v és v' különböző csúcsokhoz található pontosan egy olyan él, aminek v a kezdőpontja és v' a végpontja. $\vec{K}_n$ nem K_n irányítása, sőt nem is egyszerű gráf, ha $n > 1$.

Példák



137. Definiáld az irányított részgráf fogalmát!

138. Definiáld a feszített/telített irányított részgráf fogalmát!

Definíció

A $G' = (\psi', E', V')$ irányított gráfot a $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf **irányított részgráfiának** nevezzük, ha $E' \subset E$, $V' \subset V$ és $\psi' \subset \psi$. Ekkor G -t a G' **irányított supergráfiának** hívjuk.

Ha a G' irányított részgráf mindazokat az éleket tartalmazza, melyek kezdőpontjai és végpontjai V' -ben vannak, akkor G' -t a V' által meghatározott **feszített irányított** (vagy **telített irányított**) **részgráfnak** nevezzük.

139. Definiáld irányított gráf komplementerét!

Definíció

Ha $G' = (\psi', E', V')$ irányított részgráfja a $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfnak, akkor a G' -nek a G -re vonatkozó **komplementerén** a $(\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráfot értjük.

140. Definiáld az élek/csúcsok törlését irányított gráf esetén!

Definíció

Ha $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf, és $E' \subset E$, akkor a G -ből az E' **élhalmaz törlésével** kapott irányított gráfon a $G' = (\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ irányított részgráfot értjük.

Definíció

Ha $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf, és $V' \subset V$, akkor legyen E' az összes olyan él halmaza, amelyeknek kezdőpontja vagy végpontja valamely V' -beli csúcs. A G -ből a V' **csúcselhalmaz törlésével** kapott irányított gráfon a $G' = (\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V \setminus V')$ irányított részgráfot értjük.

141. Definiáld az irányított séta fogalmát!

142. Definiáld a zárt/nyílt irányított séta fogalmát!

Definíció

Legyen $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf. A

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozatot **irányított sétának** nevezzük v_0 -ból v_n -be, ha

- $v_j \in V \quad 0 \leq j \leq n$,
- $e_k \in E \quad 1 \leq k \leq n$,
- $\psi(e_m) = (v_{m-1}, v_m) \quad 1 \leq m \leq n$.

Ha $v_0 = v_n$, akkor **zárt irányított sétáról** beszélünk, különben **nyílt irányított sétáról**.

143. Definiáld az irányított vonal fogalmát!

Definíció

Ha az irányított sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor **irányított vonalnak** nevezzük.

Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt irányított vonalról.

144. Definiáld az irányított út fogalmát!

Definíció

Ha az irányított sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor **irányított útnak** nevezzük.

145. Definiáld az irányított kör fogalmát!

Definíció

Egy legalább egy hosszú zárt irányított vonalat **irányított körnek** nevezünk, ha a kezdő- és végpont megegyeznek, de egyébként az irányított vonal pontjai különböznek.

146. Definiáld az erősen összefüggő gráf fogalmát!

Definíció

Egy irányított gráfot **erősen összefüggőnek** nevezünk, ha bármely csúcsából bármely csúcsába vezet irányított út.

147. Definiáld az erős komponens fogalmát!

A $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf esetén V elemeire vezessük be a $\sim$ relációt: $v \sim v'$ pontosan akkor, ha G -ben vezet irányított út v -ből v' -be, és v' -ből is vezet irányított út v -be.

A $\sim$ ekvivalenciareláció (Miért?), így meghatároz egy osztályozást V -n.

A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített irányított részgráf az irányított gráf egy **erős komponense**.

148. Mi a kapcsolat egy irányított gráf erős komponensei és összefüggősége között?

Megjegyzés

Nyilván egy irányított gráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha minden csúcs ugyanabba az osztályba tartozik, azaz ha csak egyetlen erős komponense van.

149. Definiáld az irányított fa fogalmát!

Definíció

Az **irányított fa** olyan irányított gráf, amely fa, és van egy csúcsa, amelynek befoka 0, továbbá az összes többi csúcs befoka 1.

Azt a csúcsot, amelynek befoka 0 **gyökérnek** nevezzük. Az olyan csúcs, aminek a kifoka 0 a **levél**.