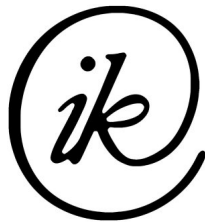


ANALÍZIS II. DEFINÍCIÓK, TÉTELEK

Szerkesztette: *Balogh Tamás*

2013. január 16.



Ha hibát találsz, kérlek jelezd a *info@baloghtamas.hu* e-mail címen!



Ez a Mű a Creative Commons Nevezd meg! - Ne add el! - Így add tovább! 3.0 Unported
Licenc feltételeinek megfelelően szabadon felhasználható.

1. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát!

Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

Ha $a \in D_f \cap D'_f$, akkor $f \in C(a) \Leftrightarrow \exists \lim_a f$ és $\lim_a f = f(a)$.

4. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

$a \in D_f$, ekkor $f \in C(a) \Leftrightarrow \forall (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow D_f$, amelyre $\lim x_n = a : \lim f(x_n) = f(a)$.

7. Definiálja a megszüntethető szakadási hely fogalmát!

Az f függvénynek az $a \in \mathfrak{D}_f$ megszüntethető szakadási helye, ha $\exists$ és véges $\lim_a f \neq f(a)$.

8. Definiálja a elsőfajú szakadási hely fogalmát!

Az f függvénynek az $a \in \mathfrak{D}_f$ elsőfajú szakadási helye, ha $\exists$ és véges $\lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f$.

9. Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos $\Rightarrow f$ korlátos $[a, b]$ -n.

10. Hogyan szól a Weierstrass-tétel?

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvénynek $\exists$ abszolút maximuma/minimuma.

11. Mit mond ki a Bolzano-tétel?

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Ha $f(a) * f(b) < 0$, akkor $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = 0$.

12. Mit tud mondani intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészletéről?

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, $I \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathfrak{R}_f$ is intervallum.

13. Mikor nevez egy függvényt egyenletesen folytonosnak?

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

14. Írja le a Heine-tételt!

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow f$ egyenletesen folytonos.

15. Milyen állításokat ismer az inverz függvény folytonosságáról?

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és $\exists f^{-1} \Rightarrow f^{-1}$ is folytonos.

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, és $\exists f^{-1} \Rightarrow f^{-1}$ is folytonos.

16. Legyen az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b, a, b \in \mathbb{R}$) függvény folytonos és invertálható! Mit mondhatunk ekkor az f függvény monotonitásáról?

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $\exists f^{-1} \Rightarrow f$ szigorúan monoton.

17. Értelmezze az $\ln$ függvényt!

$\exists \exp^{-1} =: \ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény.

18. Mi a definíciója az a^x ($a, x \in \mathbb{R}, a > 0$) hatványnak?

$\exp_a(x) = \exp(x \ln a) = a^x \quad (a, x \in \mathbb{R}, a > 0)$

19. Értelmezze az $\log_a$ függvényt!

$\log_a = \exp_a^{-1}$ szigorúan monoton, folytonos, ha $0 < a < 1$ vagy $a > 1$.

20. Mi a definíciója az x^α ($x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$) hatványfüggvénynek?

$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \quad x \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}.$

21. Mikor mondja, hogy egy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?

Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in \text{int } \mathfrak{D}_f$ pontban differenciálható (deriválható), ha $\exists$ és véges a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ határérték. Ekkor $f'(a)$ a függvény deriváltja az $a \in \text{int } \mathfrak{D}_f$ pontban.

Jelölés: $f \in D(a)$.

22. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \text{int } \mathfrak{D}_f$, Ekkor

$f \in \mathcal{D}(a) \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon : \mathfrak{D}_f \rightarrow \mathbb{R},$

$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon = 0$ és $f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathfrak{D}_f)$

Ekkor $A = f'(a)$.

23. Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{int } \mathfrak{D}_f$. Ekkor

i, $f \in D(a) \Rightarrow f \in \mathbf{C}(a)$

ii, $f \in D(a) \not\Rightarrow f \in \mathbf{C}(a)$.

24. Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és deriváltjáról?

$f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{int } (\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g), f, g \in \mathcal{D}(a)$ Ekkor

$fg \in D(a)$ és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

25. Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és deriváltjáról?

$f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{int } (\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g), f, g \in \mathcal{D}(a)$ Ekkor

Ha $g(a) \neq 0$, akkor $f/g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$

26. Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és deriváltjáról?

$f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{R}_g \subset \mathfrak{D}_f$, $g \in \mathcal{D}(a)$, $f \in D(g(a))$.

Ekkor $f \circ g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.

27. Milyen tételt tanult az inverz függvény differenciálhatóságáról és deriváltjáról?

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, szigorúan monoton nő és folytonos függvény. $\xi \in (a, b)$, $f \in D(\xi)$ és

$f'(\xi) \neq 0$. Ekkor

$$f^{-1} \in D(\eta) \text{ és } (f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}, \text{ ahol } f(\xi) = \eta.$$

28. Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a deriválhatóságáról és deriváltjáról?

Tegyük fel hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R > 0$.

Jelölje $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x-a)^n$ ($x \in K_R(a)$). Ekkor

$$\forall x_0 \in K_R(a) : f \in \mathcal{D}(x_0) \text{ és } f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n(x_0-a)^{n-1}.$$

29. Mi az egyoldali derivált definíciója?

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathfrak{D}_f$ és $\exists \delta > 0 : [a, a+\delta) \subset \mathfrak{D}_f$. Ekkor f jobbról deriválható az a pontban ha $\exists$ és véges a $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a)$

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathfrak{D}_f$ és $\exists \delta > 0 : (a-\delta, a] \subset \mathfrak{D}_f$. Ekkor f balról deriválható az a pontban ha $\exists$ és véges a $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_-(a)$

30. Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?

Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in \text{int } \mathfrak{D}_f$ pontban, ha $\exists K(a) \subset \mathfrak{D}_f$, hogy $f \in \mathcal{D}(K(a))$ és $f' \in \mathcal{D}(a)$. Ekkor

Az $f''(a) = (f')'(a)$ Jelölés: $f \in \mathcal{D}^2(a)$

31. Mi az n -szer deriválható függvény fogalma?

Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény n -szer deriválható az $a \in \text{int } \mathfrak{D}_f$ pontban, ha $\exists K(a) \subset \mathfrak{D}_f$, hogy $f \in D^{n-1}(K(a))$ és $f^{(n-1)} \in D(a)$. Ekkor

$f^n(a) = (f^{(n-1)})'(a)$ Jelölés: $f \in D^n(a)$.

32. Fogalmazza meg a szorzatfüggvény deriváltjaira vonatkozó Leibniz-tételt!

Ha $f, g \in D^n(a)$, akkor $fg \in D^n(a)$ és $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)$.

33. Mondja ki a Rolle tételt!

$f \in \mathcal{C}[a, b]$, $f \in \mathcal{D}(a, b)$, $f(a) = f(b)$. Ekkor

$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

34. Mondja ki a Cauchy-féle középértéktételt!

$f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, $f, g \in \mathcal{D}(a, b)$, $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$. Ekkor

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

35. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!

$f \in \mathcal{C}[a, b]$, $f \in \mathcal{D}(a, b)$. Ekkor

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

36. Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen lokális minimuma van?

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \text{int } \mathfrak{D}_f$ pontban *lokális minimuma* van, ha

$$\exists K(a) \subset \mathfrak{D}_f : f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in K(a).$$

37. Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen jelet vált?

Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a $c \in \mathfrak{D}_f$ pontban előjelet vált, ha $f(c) = 0$ és $\exists \delta > 0$, $K_\varepsilon(c) \subset \mathfrak{D}_f$, $f(x) < 0 \forall x \in (c - \delta, c)$ és $f(x) > 0 \forall x \in (c, c + \delta)$ vagy fordítva.

38. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel?

$f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } \mathfrak{D}_f$, $f \in \mathcal{D}(a)$.

Ha f -nek lokális szélsőértéke van a -ban, akkor $f'(a) = 0$.

39. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel?

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{D}(a, b)$, $c \in (a, b)$, $f'(c) = 0$.

Ha f' előjelet vált c -ben, akkor f -nek lokális szélsőértéke van. Ha f' '-'-ből '+'-ba vált akkor f -nek lokális minimuma van, ha f' '+'-ból '-'-ba vált akkor f -nek lokális maximuma van.

40. Írja le a lokális minimumra vonatkozó másodrendű feltételt!

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{D}(a, b)$, $c \in (a, b)$, $f'(c) = 0$.

Ha $f \in \mathcal{D}^2(c)$ és $f''(c) \neq 0$, akkor f -nek lokális szélsőértéke van c -ben. Ha $f''(c) < 0$, akkor f -nek lokális maximuma van, ha $f''(c) > 0$, akkor f -nek lokális minimuma van.

41. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer differenciálható függvény monoton növekedésével kapcsolatban?

$f \in \mathcal{D}(a, b)$. Ekkor

i, f monoton nő $\Leftrightarrow f' \geq 0$ (a, b) -n

ii, f szigorúan monoton nő $\Leftrightarrow f' \geq 0$ (a, b) -n és $\nexists (c, d) \subset (a, b) : f' = 0$ (c, d) -n.

42. Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt!

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, és:

i, $f, g \in \mathcal{D}(a, b)$, $-\infty \leq a < b < \infty$

ii, $\exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$

iii, $g'(x) \neq 0 \quad x \in (a, b)$

iv, $\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \in \bar{\mathbb{R}}$

Ekkor $\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} = A$.

43. Írja le a $\frac{\infty}{\infty}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt*!

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, és:

- i, $f, g \in \mathcal{D}(a, b)$, $-\infty \leq a < b < \infty$
 - ii, $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty$
 - iii, $g'(x) \neq 0 \quad x \in (a, b)$
 - iv, $\lim_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \in \bar{\mathbb{R}}$
- Ekkor $\lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} = A$.

44. Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in K_R(a))$ egy konvergens hatványsor összegfüggvénye ($R > 0$ feltehető) $\Rightarrow f \in \mathcal{D}^{\infty}(x)$ és $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n n(n-1) \dots (n-k+1) (x-a)^{n-k}$ és $f^{(k)}(a) = \alpha_k k! \Rightarrow \alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (\forall k \in \mathbb{N})$.

45. Hogyan definiálja egy függvény Taylor-sorát?

Ha $f \in \mathcal{D}^{\infty}(a) \Rightarrow$ Legyen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ hatványsor az f függvény a ponthoz tartozó Taylor sora.

46. Fogalmazza meg a Taylor formula Lagrange maradéktaggal néven tanult tételt!

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{D}^{(n+1)}(K(a))$. Ekkor $\forall x \in K(a) : \exists \xi \in (a, x) :$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!)(x-a)^{n+1}$$

47. Mi a konvex függvény definíciója?

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konvex, ha $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, \forall \lambda \in [0, 1] :$

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ és szigorúan konvex, ha

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

48. Jellemezze egy függvény konvexitását (konkávitását) az első derivált segítségével!

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{D}(a, b) :$

a, f konvex $\Leftrightarrow f'$ monoton nő (a, b) -n

b, f szigorúan konvex $\Leftrightarrow f'$ szigorúan monoton nő (a, b) -n.

49. Jellemezze egy függvény konkávitását a második derivált segítségével!

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{D}^2(a, b) :$

a, f konvex $\Leftrightarrow f'' \geq 0(a, b)$ -n

b, f szigorúan konvex $\Leftrightarrow f'' > 0(a, b)$ -n.

50. Mi az inflexiós pont definíciója?

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b), f \in \mathcal{D}(x_0)$. Ekkor az x_0 pont az f inflexiós pontja, ha az $l(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$. Az $l(x)$ függvény szigorúan előjelet vált x_0 -ban, azaz $\exists \delta > 0$, hogy $l(x) < 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ és $l(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, vagy fordítva.

51. Milyen szükséges feltételt ismer a második derivált és az inflexiós pont kapcsolatáról?

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x \in (a, b)$

Ha f kétszer folytonosan deriválható x_0 -ban, és x_0 inflexiós pont, akkor $f''(x_0) = 0$.

52. Milyen elégséges feltételt ismer a harmadrendű derivált és az inflexiós pont kapcsolatáról?

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x \in (a, b)$

Ha f háromszor folytonosan deriválható, $f''(x_0) = 0$, és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor x_0 inflexiós pont.

53. Definiálja a primitív függvényt!

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye az $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, ha $F \in \mathcal{D}(I)$ és $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

54. Adjon meg olyan függvényt, amelyiknek nincs primitív függvénye!

pl.: $f(x) = \operatorname{sign} x$, Nem létezik primitív függvénye, mert f nem Darboux tulajdonságú.

55. Definiálja az egy adott pontban eltűnő primitív függvény fogalmát!

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $x_0 \in I$ -ben eltűnő primitív függvénye $F = \int_x f$, amelyre

$F' = f, F(x_0) = 0$.

56. A primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltétel!

Ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor f Darboux tulajdonságú, azaz $\forall a, b \in I, a < b, \forall c \in (f(a), f(b)) \exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = c$.

57. Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?

Ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvénye F , akkor $\int f := \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ az összes primitív függvény halmaza. $\int f$ -et határozatlan integrálnak nevezzük.

Jel: $\int f = F + c, c \in \mathbb{R}, \int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

58. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

$f, g \in \mathcal{R}[a, b], \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor $(\alpha_1 f + \alpha_2 g) \in \mathcal{R}[a, b]$, és $\int_a^b (\alpha_1 f + \alpha_2 g) = \alpha_1 \int_a^b f + \alpha_2 \int_a^b g$.

59. Milyen állítást ismer hatványsor összegfüggvényének a primitív függvényéről?

Ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - a)^n, x \in K_R(a), R > 0$, akkor $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} + c$.

60. Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos parciális integrálás tétele?

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I, f, g \in \mathcal{D}(I)$. Ekkor ha $f'g$ -nek létezik primitív függvénye, akkor fg' -nek is, és $\int_{x_0} f g' = f g - \int_{x_0} f' g$, és $\int_{x_0} f g' = f g - f(x_0)g(x_0) - \int_{x_0} f' g$.

61. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos első helyettesítési szabály?
 $g : I \rightarrow J, g \in \mathcal{D}(I), f : J \rightarrow \mathbb{R}, t_0 \in J$. Ha f -nek létezik primitív függvénye, akkor $(f \circ g)g'$ -nek is, és $\int_{t_0} (f \circ g)g' = \left(\int_{g(t_0)} f \right) \circ g$.

62. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos második helyettesítési szabályt!

$g : I \rightarrow J$ bijekció, $g \in \mathcal{D}(I), f : J \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in J$. Ha $(f \circ g)g'$ -nek létezik primitív függvénye, akkor f -nek is, és $\int_{x_0} f = \left(\int_{g^{-1}(x_0)} (f \circ g)g' \right) \circ g^{-1}$.

63. Adjon meg legalább három olyan függvényt, amelyeknek primitív függvénye nem elemi függvény!

$\int \sin(x^2)dx, \int \cos(x^2)dx, \int \sqrt{1+x^2}dx$.

64. Definiálja az intervallum egy felosztását!

$\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ az $[a, b]$ egy felosztása, ha $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

65. Mit jelent egy felosztás finomítása?

τ_1 és τ_2 felosztása $[a, b]$ -nak. τ_2 finomítása τ_1 -nek, ha $\tau_1 \subset \tau_2$.

66. Mi az alsó közelítő összeg definíciója?

$f \in K[a, b], \tau \in \mathcal{F}[a, b]$:

Az $s(f, \tau) = \sum_{i=1}^n \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1})$ összeg az f függvény τ -hoz tartozó alsó közelítő összege.

67. Mi a felső közelítő összeg definíciója?

$f \in K[a, b], \tau \in \mathcal{F}[a, b]$:

Az $S(f, \tau) = \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1})$ összeg az f függvény τ -hoz tartozó felső közelítő összege.

68. Mi történik egy alsó közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

$f \in K[a, b], \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$

Ha $\tau_2 > \tau_1$, akkor $s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2)$

69. Mi történik egy felső közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

$f \in K[a, b], \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$

Ha $\tau_2 > \tau_1$, akkor $S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2)$

70. Milyen viszony van az alsó és felső közelítő összegek között?

$f \in K[a, b], \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$

$s(f, \tau_1) \leq S(f, \tau_2)$

71. Mi a Darboux-féle alsó integrál definíciója?

$I_* f := \sup \{s(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} < \infty$ az f Darboux-féle alsó integrálja.

72. Mi a Darboux-féle felső integrál definíciója?

$I^* f := \inf \{S(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} \in \mathbb{R}$ az f Darboux-féle felső integrálja.

73. Mikor nevez egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak?

f Riemann integrálható, ha $I_*f = I^*f$.

Jel: $f \in \mathcal{R}[a, b]$

74. Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-) integrálját?

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = I_*f = I^*f = If$$

75. Adjon meg egy példát nem integrálható függvényre!

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$x \in [0, 1]$

$f \notin \mathcal{R}[a, b]$, hiszen $s(f, \tau) = 0 \wedge S(f, \tau) = 1$.

76. Mi az oszcillációs összeg definíciója?

$$\Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) = \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1}) \text{ az } f \text{ oszcillációs összege.}$$

77. Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal kapcsolatban tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?

$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau \in \mathcal{T}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$.

78. Felosztássorozatok segítségével adja meg a Riemann-integrálhatóság egy ekvivalensátfogalmazását!

$f \in \mathcal{R}[a, b]$ és $\int_a^b f = I \Leftrightarrow \exists (\tau_n)$ felosztássorozat, hogy $\lim s(f, \tau_n) = \lim S(f, \tau_n) = I$.

79. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények összegével kapcsolatban tanult tétel?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Ekkor $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ és $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

80. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult tétel?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Ekkor $fg \in \mathcal{R}[a, b]$.

81. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Ekkor ha $|g(x)| > 0, \forall x \in [a, b]$, akkor $f/g \in \mathcal{R}[a, b]$.

82. Mit ért a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásán?

Legyen $c \in (a, b)$. Ekkor $f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}[a, c]$ és $f \in \mathcal{R}[c, b]$. Ekkor $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

83. Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?

$\mathcal{C}[a, b] \subset \mathcal{R}[a, b]$. (???)

84. Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvény $\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, b]$.

85. Milyen tételt tanult Riemann-integrálható függvény megváltoztatását illetően?

$A \in \mathcal{R}[a, b]$ függvényt véges sok pontban megváltoztatva $\tilde{f}$ -hoz jutunk. Ekkor $\tilde{f}$ is integrálható, és $\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f$.

86. Mit ért azon, hogy a Riemann-integrál az integrandusban monoton?

Ha $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, és $f \leq g$, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

87. Mit lehet mondani Riemann-integrálható függvény abszolút értékéről integrálhatóság szempontjából?

Ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$, akkor $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ és $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

88. Mi az integrálszámítás első középértéktétele?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $g \geq 0$. Ekkor

$m := \inf_{[a,b]} f$, $M := \sup_{[a,b]} f$, Ekkor $m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$.

89. Mi az integrálszámítás második középértéktétele?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $g \geq 0$, $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Ekkor $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$.

90. Hogyan szól a Newton-Leibniz-tétel?

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}[a, b]$ és f -nek $\exists F$ primitív függvénye. Ekkor $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

91. Definiálja az integrálfüggvényt!

$f \in \mathcal{R}[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$. Ekkor az $F(x) := \int_{x_0}^x f$ ($x \in [a, b]$) függvény f az integrálfüggvénye.

92. Fogalmazza meg a differenciál- és integrálszámítás alaptételét!

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ és $F(x) = \int_{x_0}^x f$ az f integrál függvénye. Ekkor

i, $F \in \mathcal{C}[a, b]$

ii, Ha $d \in [a, b]$, és $f \in \mathcal{C}(d)$, akkor $F \in \mathcal{D}(d)$ és $F'(d) = f(d)$.

93. Mit ért parciális integráláson a Riemann-integrálokkal kapcsolatban?

$f, g \in \mathcal{D}[a, b]$, $f'g' \in \mathcal{R}[a, b]$. Ekkor $\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'$.

94. Mit mond ki a helyettesítéses integrálás tétele Riemann-integrálokra vonatkozóan?

$f \in \mathcal{R}[a, b]$, $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $g \in \mathcal{D}[\alpha, \beta]$, $f \circ gg' \in \mathcal{R}[a, b]$. Ekkor

$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_a^b (f \circ gg')$.

95. Mit tud mondani függvénygrafikon hosszának a kiszámításáról?

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$.

96. Hogyan számítja ki forgástest térfogatát?

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor $V(H) = \pi \int_a^b f^2$.

97. Hogyan számítja ki forgástest felszínét?

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor $F(H) = 2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + (f')^2}$.

Felhasznált irodalom

- ELTE IK programtervezői informatikus szak 2012 őszi féléves Analízis II. előadás alapján írt órai jegyzetem
- Szili László: Analízis Feladatokban I.
- Wikipédia