

Ugyanakkor

$$-f, f \leq |f|,$$

amiből az előbbiek és a Riemann-integrál monotonitásáról szóló tétel alapján

$$\pm \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

azaz

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \quad \square$$

20. Folytonos függvény integrálható, monoton függvény integrálható

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $[a, b]$ korlátos és zárt intervalumon értelmezett $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R[a, b]$. Ugyanez igaz, ha f -ről folytonosság helyett monotonitást tételezünk fel.

BIZONYÍTÁS: Ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \in C$, akkor egyenletesen folytonos. Ez azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (x, t \in [a, b], |x - t| < \delta).$$

Ha tehát $\tau \in \mathcal{F}_a^b$ felosztásra $\delta_\tau < \delta$ teljesül, akkor $\forall I \in \mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallumra $|I| < \delta$, így

$$\sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in I\} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Következésképpen

$$\begin{aligned} \omega(f, \tau) &= \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in I\} \cdot |I| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} |I| = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ezért $f \in R[a, b]$. (Az oszcillációs összeg tulajdonságáról szóló tétel miatt)

Ha pl. az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő (monoton fogyó esetén bizonyítás analóg), akkor valamilyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ mellett az

$$x_k := a + k \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, \dots, n)$$

osztópontokkal definiált $\tau = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}_a^b$ egyenletes felosztásra

$$\begin{aligned} \omega(f, \tau) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sup\{|f(x) - f(t)| : x_k \leq x, t \leq x_{k+1}\} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}. \end{aligned}$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott, akkor legyen a fenti $1 \leq n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$\frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} < \varepsilon,$$

amikor is $\omega(f, \tau) < \varepsilon$. Így $f \in R[a, b]$. (Az oszcillációs összeg tulajdonságáról szóló tétel miatt) $\square$