

18. Alsó- felső, ill. oszcillációs összegek és tulajdonságai, Riemann-integrál, Newton-Leibniz-formula

18.1. Alsó- felső összegek

18.1.1. Alsó-felső összegek fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b]$ korlátos, zárt intervallum, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. A $\tau \subset [a, b]$ véges halmaz az $[a, b]$ intervallum felosztása, ha $a, b \in \tau$. Ekkor $\tau = \{x_0, \dots, x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$), ahol $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Legyen

$$m_i = m_i(f) := \inf\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \quad (i = 0, \dots, n-1),$$

$$M_i = M_i(f) := \sup\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \quad (i = 0, \dots, n-1).$$

Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvénynek a τ felosztáshoz tartozó alsó összege,

$$S(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

az f függvények a τ felosztáshoz tartozó felső összege.

18.1.2. Alsó-felső összegek tulajdonsága

TÉTEL: Legyen adott a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor $\forall \tau, \mu \subset [a, b]$ felosztások esetén

1. $s(f, \tau) \leq S(f, \mu)$,
2. ha τ finomabb μ -nél, akkor $s(f, \mu) \leq s(f, \tau)$ és $S(f, \mu) \geq S(f, \tau)$.

18.2. Oszcillációs összeg

18.2.1. Oszcillációs összeg fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény korlátos, $\tau \in \mathcal{F}_a^b$. Az

$$\omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$$

szám az f függvény τ által meghatározott oszcillációs összege.

18.2.2. Oszcillációs összeg tulajdonsága <---

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény korlátos. Ekkor

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in \mathcal{F}_a^b : \omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

BIZONYÍTÁS: Ha $f \in R[a, b]$, akkor $I_*(f) = I^*(f)$. Figyelembe véve a Darboux-féle alsó-, felső integrál definícióját, mondhatjuk, hogy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu, \mu \in \mathcal{F}_a^b : s(f, \nu) > I_*(f) - \varepsilon/2, S(f, \mu) < I^*(f) + \varepsilon/2.$$

Legyen $\tau := \nu \cup \mu$, ekkor az alsó- felső összegekre vonatkozó tétel miatt:

$$s(f, \tau) \geq (s(f, \nu) > I_*(f) - \varepsilon/2, S(f, \tau) < \text{leq} S(f, \mu) < I^*(f) + \varepsilon/2.$$

Innen következik, hogy

$$\omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) < I^*(f) - I_*(f) + \varepsilon = \varepsilon,$$

hiszen azt tettük fel, hogy $f \in R[a, b]$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$.

Most induljunk ki abból, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \in \mathcal{F}_a^b : \omega(f, \tau) = I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon.$$

Mivel $I^*(f) - I_*(f) \geq 0$, ezért csak $I^*(f) - I_*(f) = 0$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$ lehetséges. Ez azt jelenti, hogy $f \in R[a, b]$. $\square$

18.3. Riemann-integrál

DEFINÍCIÓ: Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b]$ korlátos, zárt intervallum, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény Riemann-integrálható, ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ekkor az

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x) dx := I_*(f) = I^*(f)$$

szám az f függvény Riemann-integrálja.

18.4. Newton-Leibniz-formula

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $a, b]$ korlátos zárt intervallum, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in R[a, b]$, $\exists F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : F \in D$, $F' = f$. Ekkor

$$\forall F : \int_a^b f = F(b) - F(a).$$