

11. A L'Hospital szabály ($\lim_a f = \lim_a g = 0$, $a \in \mathbb{R}$) eset bizonyítása

TÉTEL: Legyen $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in D$. Tegyük fel, hogy a következők teljesülnek:

1. $g'(x) \neq 0$ ($a < x < b$),
2. $\lim_a f = \lim_a g = 0$, vagy $\lim_a f = \pm\infty$ és $\lim_a g = \pm\infty$,
3. $\exists A := \lim_a (f'/g')$ határérték.

Ekkor $\exists \lim_a (f/g)$ és $\lim_a (f/g) = A$. Igaz akkor is ha a 2., 3., feltételben a helyére b -t írunk. Ekkor $\exists \lim_b (f/g)$ és $\lim_b (f/g) = A$.

BIZONYÍTÁS: ($\lim_a f = \lim_a g = 0$, $a \in \mathbb{R}$ eset):

Ha $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists d \in (a, b) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon \quad (a < x < d)$.

Legyen $a < x < d$, és $F, G: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(t) := \begin{cases} 0 & (t = a) \\ f(t) & (a < t \leq x) \end{cases}, G(t) := \begin{cases} 0 & (t = a) \\ g(t) & (a < t \leq x) \end{cases}.$$

Ekkor

$$\exists \lim_a F = \lim_a f = 0 = F(a), \exists \lim_a G = \lim_a g = 0 = G(a).$$

Így $F, G \in C\{a\}$ és $F, G \in C\{x\}$. Továbbá $\forall t \in (a, x) : F, G \in D\{t\}$, és $F'(t) = f'(t)$, $G'(t) = g'(t) \neq 0 \xRightarrow{\text{Cauchy}} \exists \xi \in (a, x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Mivel $a < \xi < d$ ezért $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon \quad (a < x < d)$.

Ez az jelenti, hogy $\exists \lim_a (f/g) = A$. $\square$

12. Konvex, konkáv függvények. A differenciahányados függvény monotonitása (szükséges és elégséges feltétel)

12.1. Konvex, konkáv függvény

DEFINÍCIÓ: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor az f függvény konvex, ha

$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

konkáv, ha

$$\forall a, b \in I \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

12.2. Diferenciahányados függvény monotonítása

TÉTEL: Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartománya intervallum. Ekkor

1. f konvex $\Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{D}_f : \Delta_a f \nearrow$,
2. f konkáv $\Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{D}_f : \Delta_a f \searrow$.

BIZONYÍTÁS: Először tegyük fel, hogy f konvex. Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $x, t \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $x < t$. Ekkor három eset lehetséges:

1. $a < x < t$, ekkor a

$$\lambda := \frac{t-x}{t-a} \in (0, 1),$$

számmal $x = \lambda a + (1-\lambda)t$, így f feltételezett konvexitása miatt

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{\lambda f(a) + (1-\lambda)f(t) - f(a)}{\lambda a + (1-\lambda)t - a} = \frac{f(t) - f(a)}{t-a} = \Delta_a f(t),$$

így $\Delta_a f(x) \leq \Delta_a f(t)$.

2. $x < t < a$, ekkor a

$$\lambda := \frac{a-t}{a-x} \in (0, 1)$$

számmal $t = \lambda x + (1-\lambda)a$, így f feltételezett konvexitása alapján most $t-a < 0$ miatt

$$\Delta_a f(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t-a} \geq \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(a) - f(a)}{\lambda x + (1-\lambda)a - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \Delta_a f(x),$$

így $\Delta_a f(x) \leq \Delta_a f(t)$,

3. $x < a < t$, amikor vegyük észre, hogy

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{f(a) - f(x)}{a-x} = \Delta_x f(a).$$

Így az 1. esetet figyelembe véve ($x \longleftrightarrow a$ cserével)

$$\Delta_x f(a) \leq \Delta_x f(t) = \Delta_t f(x),$$

amiből a 2. szerint ($t \longleftrightarrow a$ cserével):

$$\Delta_t f(x) \leq \Delta_t f(a) = \Delta_a f(t)$$

Tehát $\Delta_a f(x) \leq \Delta_a f(t)$.

Ezzel beláttuk a $\Rightarrow$ irányt. Mutassuk meg a $\Leftarrow$ irányt, amihez tegyük fel, hogy $\forall a \in \mathcal{D}_f : \Delta_a f \nearrow$.

Legyen $u, v \in \mathcal{D}_f$, $u < v$ és $0 \leq \lambda \leq 1$. Mivel az

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)$$

egyenlőtlenség $\lambda = 0$ vagy $\lambda = 1$ esetén triviális, így feltehető: $0 < \lambda < 1$. Legyen $c := \lambda u + (1 - \lambda)v$, így $u < c < v$, tehát a $\Delta_c f$ függvény monoton növekedése alapján

$$\Delta_c f(u) = \frac{f(u) - f(c)}{u - c} = \frac{f(u) - f(c)}{(1 - \lambda)(u - v)} \leq \Delta_c f(v) = \frac{f(v) - f(c)}{v - c} = \frac{f(v) - f(c)}{\lambda(v - u)}.$$

Így

$$\lambda(f(c) - f(u)) \leq (1 - \lambda)(f(v) - f(c)),$$

tehát

$$f(c) = f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$$

adódik. Vagyis az f függvény konvex (2. állítás analóg módon). $\square$

13. A konvexitás (konkávítás) jellemzése differenciálható függvények esetén: a deriváltfüggvény monotonítása, a függvény és az érintők viszonya

13.1. A konvexitás jellemzése differenciálható függvények esetén <--

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D$. Ekkor

1. f konvex $\Leftrightarrow f' \nearrow$,

2. f konkáv $\Leftrightarrow f' \searrow$.

BIZONYÍTÁS: 1. rész bizonyítása (2. analóg módon): Tegyük fel, hogy f konvex. Ekkor a differenciahányados monotonítása tétel miatt

$$\forall a \in I : \Delta_a f \nearrow.$$

Legyen $a, b \in I$, $a < b \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$. Ugyanis

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_a \Delta_a f = \lim_{a+0} \Delta_a f = \inf\{\Delta_a f(x) : a < x \in I\} \leq \\ &\leq \Delta_a f(b) = \Delta_b f(a) \leq \sup\{\Delta_b f(t) : I \ni t < b\} = \lim_{b-0} \Delta_b f = \\ &= \lim_b \Delta_b f = f'(b) \Rightarrow f' \nearrow. \end{aligned}$$

Most tegyük fel, hogy $f' \nearrow$.

Legyen $a, b \in I$, $a < b$. Ekkor a Lagrange-középérték miatt

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Tekintsük az

$$F(x) := f(a) + f'(\xi)(x - a) - f(x) \quad (x \in (a, b))$$

függvényt. Ha $\lambda \in [0, 1]$, akkor $c := \lambda a + (1 - \lambda)b$ jelöléssel

$$\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) - f(\lambda a + (1 - \lambda)b) = F(c).$$

Az f konvexitásához elég belátni, hogy $F(x) \geq 0$ ($x \in [a, b]$). Világos, hogy $F \in D\{x\}$ és

$$F'(x) = f'(\xi) - f'(x) \quad (x \in (a, b)),$$

Ezért f monoton növekedése miatt

$$F'(x) \geq 0 \quad (a < x < \xi), \quad F'(x) \leq 0 \quad (\xi < x < b).$$

Ezért az $F|_{[a, \xi]}$ függvény monoton növekedő, az $F|_{[\xi, b]}$ pedig monoton fogyó.

Így $F(a) = F(b) = 0$ egyenlőségek alapján következik, hogy $F(x) \geq 0$ ($x \in [a, b]$) $\square$.

13.2. A függvény és az érintők viszonya

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in D\{a\}$. Ekkor az

$$e_a f(x) := f(a) + f'(a)(x - a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

az f függvény a -beli érintője.

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D$. Ekkor

1. f konvex $\Leftrightarrow \forall a \in I : f \geq e_a f$,
2. f konkáv $\Leftrightarrow \forall a \in I : f \leq e_a f$.

BIZONYÍTÁS: 1. rész bizonyítása (2. analóg módon): Tegyük fel, hogy f konvex. Ekkor a konvexitás és deriváltfüggvény kapcsolatáról szóló tétel alapján $f' \nearrow$. Legyen $a \in I$ és

$$F(x) := f(x) - e_a f(x) \quad (x \in I).$$

Ekkor $F \in D$ és $F'(x) = f'(x) - f'(a)$ ($x \in I$). Világos, hogy $F'(a) = 0$ és f' monoton növekedése miatt

$$F'(x) \leq 0 \leq F'(t) \quad (x, t \in I, x \leq a \leq t).$$

Tehát $F|_{(-\infty, a] \cap I} \searrow$, $F|_{[a, +\infty) \cap I} \nearrow$. Mivel $F(a) = 0$ ezért $F(x) \geq 0$ ($x \in I$). Vagyis

$$f(x) \geq e_a f(x) \quad (x \in I).$$

Ha az utóbbi ($\forall a \in I$ -re feltételezett) egyenlőtlenségből indulunk ki, akkor adódik f' monoton növekedése. Legyen $a, b \in I$, $a < b$. Ekkor

$$f(b) \geq e_a f(b) = f(a) + f'(a)(b - a)$$

és

$$f(a) \geq e_b f(a) = f(b) + f'(b)(a - b).$$

A két egyenlőtlenséget összeadva:

$$f(b) + f(a) \geq f(a) + f(b) + (f'(a) - f'(b))(b - a) \Rightarrow 0 \geq f'(a) - f'(b) \Rightarrow f'(a) \leq f'(b). \quad \square$$