

9. Taylor-formula (Lagrange-féle maradéktag)

TÉTEL: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in D^{n+1}$. Ekkor $\forall a \neq x \in I$, $\exists \xi \in (a, x)$ vagy $\xi \in (x, a)$:

$$f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{T_{a,n}f(x)} = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}}_{\text{Lagrange-maradék}}.$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $\delta := \frac{f(x) - T_n f(x)}{(x-a)^{n+1}}$ és $F(t) := f(t) - T_n f(t) - \underbrace{\delta \cdot (t-a)^{n+1}}_{:=h} \quad (t \in I) \Rightarrow F \in D^{n+1}$

és

$$F^{(j)}(t) = f^{(j)}(t) - (T_n f)^{(j)}(t) - h^{(j)}(t) \quad (t \in I)$$

Ebből következik, hogy $F(a) = 0 = F(x) \xRightarrow{\text{Rolle}} \exists \xi_1 \in (a, x)$ vagy $\xi_1 \in (x, a)$:

$F'(\xi_1) = 0 \xRightarrow{\text{Rolle}} \exists \xi_2 \in (a, \xi_1)$ vagy $\xi_2 \in (\xi_1, a) : F''(\xi_2) = 0$, de $F''(a) = 0$ és így tovább:

$\exists \xi_{n+1} \in (a, \xi_n)$ vagy $\xi_{n+1} \in (\xi_n, a) :$

$$F^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - h^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \cdot \delta \Rightarrow \delta = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \square.$$

10. Differenciálható függvények monotonítása. A derivált függvény Darboux-tulajdonságú

10.1. Differenciálható függvények monotonítása

10.1.1. Monotonítás

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f$ nyílt intervallum, $f \in D$. Ekkor

1. f monoton növekvő $\Leftrightarrow f' \geq 0$,
2. f monoton fogyó $\Leftrightarrow f' \leq 0$.

BIZONYÍTÁS: Nézzük az 1. esetet (2. eset hasonlóan):

" $\Rightarrow$ " $a \in \mathcal{D}_f$, $a \neq x \in \mathcal{D}_f : \Delta_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ hiszen

- ha $a < x \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ és $x - a > 0$,

- ha $x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$ és $x - a < 0$.

Ebből következik, hogy $f'(a) = \lim_a \Delta_a f \geq 0 \Rightarrow f' \geq 0$.

" $\Leftarrow$ " Legyen $a, b \in \mathcal{D}_f$, $a < b$. Ekkor a Lagrange-tétel miatt:

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \geq 0$$

és $b - a > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq f(a) \Rightarrow f \nearrow$. $\square$