

11. A L'Hospital szabály ($\lim_a f = \lim_a g = 0$, $a \in \mathbb{R}$) eset bizonyítása

TÉTEL: Legyen $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in D$. Tegyük fel, hogy a következők teljesülnek:

1. $g'(x) \neq 0$ ($a < x < b$),
2. $\lim_a f = \lim_a g = 0$, vagy $\lim_a f = \pm\infty$ és $\lim_a g = \pm\infty$,
3. $\exists A := \lim_a (f'/g')$ határérték.

Ekkor $\exists \lim_a (f/g)$ és $\lim_a (f/g) = A$. Igaz akkor is ha a 2., 3., feltételben a helyére b -t írunk. Ekkor $\exists \lim_b (f/g)$ és $\lim_b (f/g) = A$.

BIZONYÍTÁS: ($\lim_a f = \lim_a g = 0$, $a \in \mathbb{R}$ eset):

Ha $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists d \in (a, b) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon \quad (a < x < d)$.

Legyen $a < x < d$, és $F, G: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(t) := \begin{cases} 0 & (t = a) \\ f(t) & (a < t \leq x) \end{cases}, G(t) := \begin{cases} 0 & (t = a) \\ g(t) & (a < t \leq x) \end{cases}.$$

Ekkor

$$\exists \lim_a F = \lim_a f = 0 = F(a), \exists \lim_a G = \lim_a g = 0 = G(a).$$

Így $F, G \in C\{a\}$ és $F, G \in C\{x\}$. Továbbá $\forall t \in (a, x) : F, G \in D\{t\}$, és $F'(t) = f'(t)$, $G'(t) = g'(t) \neq 0 \xRightarrow{\text{Cauchy}} \exists \xi \in (a, x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Mivel $a < \xi < d$ ezért $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon \quad (a < x < d)$.

Ez az jelenti, hogy $\exists \lim_a (f/g) = A$. $\square$

12. Konvex, konkáv függvények. A differenciahányados függvény monotonitása (szükséges és elégséges feltétel)

12.1. Konvex, konkáv függvény

DEFINÍCIÓ: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor az f függvény konvex, ha

$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

konkáv, ha

$$\forall a, b \in I \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$