

5.2.2. Többször deriválható függvény fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Ekkor az f függvény az a -ban $(n+1)$ -szer deriválható, ha $\exists r > 0 : (a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_f$, $f \in D^n\{x\}$ ($x \in (a-r, a+r)$), és $f^{(n)} \in D\{a\}$. Jelölése: $f \in D^{n+1}\{a\}$. Legyen ekkor $f^{(n+1)}(a) := (f^{(n)})'(a)$ az f függvény a -beli $(n+1)$ -edik deriváltja.

5.2.3. Végtelenször deriválható függvény fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Ha $\forall 1 \leq n \in \mathbb{N} : f \in D^n\{a\}$, akkor az f függvény az a pontban ∞ -sokszor deriválható. Jelölése: $f \in D^\infty\{a\}$. Ha $\forall a \in \mathcal{D}_f$ helyen igaz az utóbbi, akkor f függvény ∞ -szokszor deriválható. Jelölése $f \in D^\infty$.

5.3. Taylor sor fogalma

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$, $f \in D^\infty\{a\}$, és $a_n := \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor a $\sum(a_n(x-a)^n)$ hatványsor az f függvény a -beli Taylor-sora, a_n pedig az f függvény a -beli n -edik Taylor együtthatója ($n \in \mathbb{N}$).

$$T_{a,n}f(x) := \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N})$$

az f a -beli n -edik Taylor polinomja.

6. Az inverz függvény deriváltja. Az exponenciális-, a logaritmus- és a hatvány-függvények deriválása

6.1. Inverz függvény deriváltja

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ invertálható függvény, $a \in \mathcal{D}_f$, $f \in D\{a\}$, $f'(a) \neq 0$, $f(a) \in \text{int } \mathcal{R}_f$, $f^{-1} \in C\{f(a)\}$. Ekkor $f^{-1} \in D\{f(a)\}$ és

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

BIZONYÍTÁS: Belátjuk:

$$\lim_{f(a)} \Delta_{f(a)} f^{-1} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{hat.ért. von. átv. elv} \Leftrightarrow f(a) \neq \underbrace{y_n}_{=f(x_n)} \in \mathcal{R}_f = \mathcal{D}_{f^{-1}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

és $\lim (y_n) = f(a)$, ahol

$$a \neq x_n \in \mathcal{D}_f \quad \text{folyt. von. átv. elv} \Rightarrow \exists \lim (f^{-1}(f(x_n))) = \lim (x_n) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

Tehát:

$$\Delta_{f(a)} f^{-1}(y_n) = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(a))}{y_n - f(a)} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} = \frac{1}{\Delta_a f(x_n)},$$

ahol (átviteli elv)

$$\exists \lim (\Delta_a f(x_n)) = \lim_a \Delta_a f = f'(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta_a f(x_n)} \rightarrow \frac{1}{f'(a)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$\text{Tehát } \Delta_{f(a)} f^{-1}(y_n) \rightarrow \frac{1}{f'(a)} \quad (n \rightarrow \infty). \quad \square$$

6.2. Exponenciális függvény deriváltja

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}). \text{ Ekkor } \exp \in D \text{ és}$$

$$\exp' x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp x$$

6.3. Logaritmusfüggvény deriváltja

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \exists \exp^{-1} = \ln. \text{ Ekkor } \ln \in D \text{ és}$$

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

6.4. Hatvány függvény deriváltja

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha \quad (x > 0)$ azaz $x^\alpha = \exp(\ln x^\alpha) = \exp(\alpha \ln x)$. Ekkor $f_\alpha \in D$ és

$$f'_\alpha(x) = \exp'(\alpha \ln x)(\alpha \ln)'(x) = \exp(\alpha \ln x) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$