2.3. Ekvivalens átfogalmazás

DEFINÍCIÓ: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $\Delta_a f \colon \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ (differenciahányados függvény), ahol $\Delta_a f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_f)$.

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. $f \in D\{a\} \Leftrightarrow \exists \lim\limits_a \Delta_a f \in \mathbb{R}$ és $f'(a) = \lim\limits_a \Delta_a f$.

BIZONYÍTÁS:

$\Rightarrow$ Tegyük fel, hogy $f \in D\{a\}$. Így

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \eta(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

ahol $\lim\limits_a \eta = 0$. Ezért

$$\Delta_a f(x) - f'(a) = \eta(x) \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_f),$$

Amiből $\lim\limits_a \eta = 0$ miatt $\lim\limits_a (\Delta_a f - f'(a)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_a \Delta_a f = f'(a)$.

$\Leftarrow$ Fordítva, most azt tegyük fel, hogy $\exists\, A := \lim\limits_a \Delta_a f \in \mathbb{R}$, és legyen

$$\eta(x) := \Delta_a f(x) - A \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_f),$$

Így $\exists \lim\limits_a \eta = \lim\limits_a (\Delta_a f - A) = 0$ és

$$f(x) - f(a) = (x-a)\Delta_a f(x) = A(x-a) + \eta(x)(x-a) \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_f).$$

Tehát $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A = \lim\limits_a \Delta_a f \in \mathbb{R}$. $\square$

2.4. Differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata

TÉTEL: Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $f \in D\{a\} \Rightarrow f \in C\{a\}$.

BIZONYÍTÁS:
$f(x) - f(a) = f'(a) \underbrace{(x-a)}_{\to 0} + \eta(x) \underbrace{(x-a)}_{\to 0} \quad (x \in \mathcal{D}_f) \Rightarrow f(x) - f(a) \to 0 \, (x \to a)$, azaz

$$\exists \lim_a f = f(a) \Rightarrow f \in C\{a\}. \qquad \square$$

3. Differenciálható függvények műveletei

TÉTEL: Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$, $f, g \in D\{a\}$. Ekkor

1. $f + g \in D\{a\}$, és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. $\forall\, c \in \mathbb{R} : cf \in D\{a\}$, és $(cf)'(a) = cf'(a)$,
3. $f \cdot g \in D\{a\}$, és $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$,
4. ha $g(a) \neq 0$, akkor $f/g \in D\{a\}$, és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$.

BIZONYÍTÁS:

1.

$$\lim_a \Delta_a(f+g) = \lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = \lim_a\,(\Delta_a f+\Delta_a g) =$$

$$= \lim_a \Delta_a f + \lim_a \Delta_a g = f'(a)+g'(a).$$

2.

$$\lim_a \Delta_a(cf) = \lim_{x\to a}\frac{(cf)(x)-(cf)(a)}{x-a} = c\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c\cdot\lim_a \Delta_a f = c\cdot f'(a).$$

3.

$$\lim_a \Delta_a(f\cdot g) = \lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{g(x)(f(x)-f(a))+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left(g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = \lim_a\,(g\cdot\Delta_a f+f(a)\cdot\Delta_a g) =$$

$$= (\lim_a g)(\lim_a \Delta_a f)+f(a)(\lim_a \Delta_a g) = f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).$$

(Mivel $g\in D\{a\}\Rightarrow g\in C\{a\}\Rightarrow \lim_a g = g(a)$).

4.

$$\lim_a \Delta_a\left(\frac{f}{g}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{x-a)}\cdot\frac{1}{g(x)\cdot(g(a)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g(x)\cdot g(a)}\cdot\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a)-\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot f(a)\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g(x)\cdot g(a)}\cdot\left(g(a)\cdot\Delta_a f(x)-f(a)\Delta_a\cdot g(x)\right)\right) =$$

$$= \left(\lim_a \frac{1}{g(x)\cdot g(a)}\right)\cdot\left(g(a)\cdot\lim_a \Delta_a f - f(a)\cdot\lim_a \Delta_a g\right) = \frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}. \qquad \square$$